Corrigé CCP 2012-Filière -MP- mathématiques 2

Omar SADIK - Lycée Technique TAZA.

EXERCICE

1°. Le petit **Théorème de FERMAT** affirme que : $3^{10} \equiv 1\ [11]$, car $3 \wedge 11 = 1$, donc $p \leqslant 10$, un petit calcul donne $p = 5$.

2°. $5^2 = 25 \equiv 3\,[11]$, donc $5^{2n} \equiv 3^n$, $3^{2012} = (3^5)^{402} \times 9 \equiv 9\ [11]$ par suite :
$3^{n+2012} \equiv 3^n \times 9\ [11]$ et $9 \times 5^{2n} \equiv 9 \times 3^n\ [11]$, donc $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n} \equiv 0\ [11]$.

PROBLÈME

Partie I. Étude du cas $n = 2$.

1°. Soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi_A(M + \lambda N) &= A(M + \lambda N) - (M + \lambda N)A \\ &= \varphi_A(M) - \lambda \varphi_A(N) \end{aligned}$$

Il est évident que $\varphi_A(A) = \varphi_A(I) = 0$, donc $A, I_2 \in \mathbf{Ker}(\varphi_A)$.

2°. Un petit calcul donne : $\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$; $\varphi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$ et la matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}$$

3°. Le polynôme caractéristique de la matrice précédente est : $\chi_{\varphi_A} = X^2(X^2 - [(d-a)^2 + 4bc])$.

4°. Les matrices $A; I \in \mathbf{Ker}(\varphi_A)$ et $A \neq \lambda I_2$ donc la famille (A, I_2) qui est libre et formé de vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0, par suite 0 est valeur propre de φ_A de multiplicité $\geqslant 2$.
Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$, alors les racines de χ_{φ_A} sont simples et φ_A est diagonalisable.
Si φ_A est diagonalisable alors χ_{φ_A} est scindé dans $\mathbb{R}$, donc $(d-a)^2 + 4bc \geqslant 0$, si on suppose $(d-a)^2 + 4bc = 0$, alors $\chi_{\varphi_A} = X^4$, et le polynôme minimal de φ_A est X, c'est à dire $\varphi_A = 0$ absurde, donc $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

5°. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - (a+d)X + ad - bc$, son discriminant est $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$.
Si φ_A est diagonalisable alors de la question précédente $(d-a)^2 + 4bc > 0$, par suite χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
Si A est diagonalisable, alors $(d-a)^2 + 4bc \geqslant 0$, si on suppose que $(d-a)^2 + 4bc = 0$, alors χ_A aura une racine simple qu'on notera α, et $\chi_A = (X-\alpha)^2$ donc son polynôme minimale est $X - \alpha$, alors $A = \alpha I_2$, ce qui est absurde, donc $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

Partie II. Étude du cas général.

6°. **a/** On pose $D = (d_{i,j})$, où $d_{i,j} = \delta_{i,j}\lambda_i$, alors

$$\begin{aligned} DE_{i,j} - E_{i,j}D &= \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} d_{k,\ell} E_{k,\ell} E_{i,j} - \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} d_{k,\ell} E_{i,j} E_{k,\ell} \\ &= \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} d_{k,\ell} \delta_{\ell,i} E_{k,j} - \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} d_{k,\ell} \delta_{j,k} E_{i,\ell} \\ &= (\lambda_i - \lambda_j) E_{i,j} \end{aligned}$$

b/ $A = PDP^{-1}$, donc

$$\begin{aligned}
\varphi_A(B_{i,j}) &= AB_{i,j} - B_{i,j}A \\
&= PDP^{-1}B_{i,j} - B_{i,j}PDP^{-1} \\
&= PDE_{i,j}P^{-1} - PE_{i,j}DP^{-1} \\
&= P(DE_{i,j} - E_{i,j}D)P^{-1} \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)PE_{i,j}P^{-1} \\
&= (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}
\end{aligned}$$

Donc pour tout couple (i, j) la matrice non nul $B_{i,j}$ est un vecteur propre de φ_A.

c/ La famille $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et l'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \longmapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme, donc la famille $(PE_{i,j}P^{-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base aussi de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe une base de vecteurs propres de φ_A, donc φ_A est diagonalisable.

7°. a/ i. φ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc toutes ses valeurs propres sont réelles.

ii. Soit $z \in \mathbb{C}$, $\det B = \det {}^tB$, donc

$$\begin{aligned}
z \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \det(A - zI_n) = 0 \\
&\iff \det({}^tA - zI_n) = 0 \\
&\iff z \in \mathrm{Sp}({}^tA)
\end{aligned}$$

iii. La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est à cœfficients réelles donc on peut supposer que $z, \overline{z}$ deux valeurs propres de A.

$$\begin{aligned}
\varphi_A(X^tY) &= AX^tY - X^tYA \\
&= zX^tY - \overline{z}X^tY \quad \text{car}\, {}^tYA = \overline{z}{}^tY \\
&= (z - \overline{z})X^tY
\end{aligned}$$

Le vecteur $X^tY \neq 0$, en effet

$$\begin{aligned}
X^tY = 0 &\Longrightarrow {}^tXX^tY = 0 \\
&\Longrightarrow \|X\|{}^tY = 0 \ \text{car} \quad \|X\| \neq 0 \\
&\Longrightarrow {}^tY = 0
\end{aligned}$$

absurde, donc $z - \overline{z}$ est une valeur propre de φ_A.

b/ De la question précédente on en déduit que $\mathbf{Im}(z) = 0$, donc $z \in \mathbb{R}$.

Tout polynôme non constant à cœfficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$ **(Théorème de D'ALEMBERT GAUSS)**, donc χ_A admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$, cette valeur z est en fait réelle, par suite A admet au moins valeur propre réelle.

c/

$$\begin{aligned}
AP_{i,j}X &= P_{i,j}AX + \lambda_{i,j}P_{i,j}X \ \text{car}\ \varphi_A(P_{i,j}) = \lambda_{i,j}P_{i,j} \\
&= \lambda P_{i,j}X + \lambda_{i,j}P_{i,j}X \\
&= (\lambda + \lambda_{i,j})P_{i,j}X
\end{aligned}$$

d/ Considérons l'application : $\psi \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}^n) \\ M & \longmapsto & MX \end{array}$

ψ est évidement linéaire.

Soit x le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base c est X.

$X \neq 0$ donc $x \neq 0$, par le théorème de la base incomplète il existe $(v_2, ..., v_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tel que $(x, v_2, ..., v_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\boldsymbol{Y} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{mat_c(x)}$, il existe un unique endomorphisme $\boldsymbol{w}$ de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\boldsymbol{w(x) = y}$ et $\boldsymbol{w(v_i) = 0}$ pour tout $\boldsymbol{i} \in [\![\boldsymbol{2, n}]\!]$, soit $\boldsymbol{M}$ la matrice de $\boldsymbol{w}$ dans la base $\boldsymbol{c}$, on a bien $\boldsymbol{MX = Y}$, c'est à dire que $\boldsymbol{\psi}$ est surjective.

La famille $(\boldsymbol{P_{i,j}})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$, son image par $\boldsymbol{\psi}$ est un système générateur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}^n)$, par suite on peut extraire de la famille $(\boldsymbol{P_{i,j}X})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une base $(\boldsymbol{X_1, ..., X_n})$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}^n)$

Comme ces derniers vecteurs $\boldsymbol{X_i}$ pour $\boldsymbol{i} \in [\![\boldsymbol{1, n}]\!]$ vérifient la relation $\boldsymbol{AX_i = \alpha_i X_i}$ où $\boldsymbol{\alpha_i}$ est l'un des $\boldsymbol{\lambda + \lambda_{i,j}}$, alors, l'endomorphisme $\boldsymbol{u}$ possède une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$.

Conclusion $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres associés à une valeur propre 0.

8°. La famille $(\boldsymbol{I_n, A, ..., A^{m-1}})$ est libre, en effet si le polynôme $\boldsymbol{Q = a_{m-1}X^{m-1} + ... + a_1X + a_0}$ est annulateur de $\boldsymbol{A}$ alors il est nul, car les seuls polynômes annulateur de $\boldsymbol{A}$ non nul sont de degré $\geqslant \boldsymbol{m}$, donc tous ses cœfficients sont nuls.

Et si on prend un polynôme $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}[\boldsymbol{X}]$, en effectuant la division euclidienne de $\boldsymbol{P}$ par $\boldsymbol{\pi_A}$, il existe un unique couple $(\boldsymbol{Q, R}) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $\boldsymbol{P = Q\pi_A + R}$ où le degré de $\boldsymbol{R \leqslant m - 1}$, alors $\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{R}(A)$ car $\boldsymbol{\pi_A}(A) = \boldsymbol{0}$, et $\boldsymbol{R}(A) \in \mathrm{vect}(\boldsymbol{I_n, A, ..., A^{m-1}})$.

9°. $\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{A^k} \in \mathbf{Ker}(\varphi_A)$, donc $\mathbb{R}[A] \subset \mathbf{Ker}(\varphi_A)$, par suite de la question précédente $\mathbf{dim\,Ker}(\varphi_A) \geqslant \boldsymbol{m} = \mathbf{dim}\,\mathbb{R}[A]$.

10°. *Un cas d'égalité*

a/ Soit $(\boldsymbol{a_i})_{0\leqslant i\leqslant n-1}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{a_i u^i(y) = 0}$, si on suppose que les réels $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ ne sont pas tous nuls, alors l'ensemble $\boldsymbol{J} = \{\boldsymbol{i} \in [\![\boldsymbol{0, n-1}]\!] \,/\, \boldsymbol{a_i \neq 0}\}$ est non vide, soit $\boldsymbol{j} = \mathbf{min}\,\boldsymbol{J} \in [\![\boldsymbol{0, n-1}]\!]$, alors l'égalité précédente devient $\displaystyle\sum_{i=j}^{n-1} \boldsymbol{a_i u^i(y) = 0}$, on compose par l'endomorphisme $\boldsymbol{u^{n-1-j}}$, on obtient $\boldsymbol{a_j u^{n-1}(y) = 0}$, donc $\boldsymbol{a_j = 0}$, absurde par suite $\boldsymbol{J = \emptyset}$, la famille $(\boldsymbol{e_1, ..., e_n})$ est libre de cardinal maximal c'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

b/ $\boldsymbol{B} \in \mathbf{Ker}(\varphi_A)$ signifie que $\boldsymbol{v}$ commute avec $\boldsymbol{u}$.

Pour montrer que les endomorphismes $\boldsymbol{v}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i u^{n-i}}$ sont égaux il suffit de montrer qu'ils sont égaux sur les éléments d'une base.

Soit $\boldsymbol{j} \in [\![\boldsymbol{1}, n]\!]$, $\boldsymbol{v(u^{n-j(y)}) = u^{n-j}(v(y)) = u^{n-j}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}(y)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}(u^{n-j}(y))}$.

c/ Posons $\boldsymbol{F} = \left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i u^{n-i}} \,/\, (\boldsymbol{\alpha_i})_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n\right\} = \mathrm{vect}(\boldsymbol{u^{n-i}})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Il est évident que $\boldsymbol{F} \subset \mathbf{Ker}(\varphi_A)$.

De la question précédente $\mathbf{Ker}(\varphi_A) \subset \boldsymbol{F}$, ainsi $\mathbf{Ker}(\varphi_A) = \boldsymbol{F}$

11°. a/ Si $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\boldsymbol{v}$ commute avec $\boldsymbol{u}$ et donc $\boldsymbol{v}$ commute avec $(\boldsymbol{u - \lambda_i \mathbf{id}_{\mathbb{R}^n}})$, alors $\forall \boldsymbol{k} \in [\![\boldsymbol{1, p}]\!]$, $\boldsymbol{v(E_u(\lambda_k)) \subset (E_u(\lambda_k))}$, c'est un petit résultat du cours.

Réciproquement si $\forall \boldsymbol{k} \in [\![\boldsymbol{1, p}]\!]$, $\boldsymbol{v(E_u(\lambda_k)) \subset (E_u(\lambda_k))}$. Soit $\boldsymbol{k} \in [\![\boldsymbol{1, p}]\!]$ et $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E_u(\lambda_k)}$, alors $\boldsymbol{v(u(x)) = \lambda_k v(x)}$, et $\boldsymbol{u(v(x)) = \lambda_k v(x)}$ car $\boldsymbol{v(x) \in E_u(\lambda_k)}$, ainsi $\boldsymbol{v \circ u = u \circ v}$ sur $\boldsymbol{E_u(\lambda_k)}$, comme $\boldsymbol{u}$ est diagonalisable, les sous espaces $\boldsymbol{E_u(\lambda_k)}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, donc $\boldsymbol{v \circ u = u \circ v}$ sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b/ Dans une base adapté à la décomposition $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n} \boldsymbol{E_u(\lambda_k)} = \mathbb{R}^n$, la matrice de $\boldsymbol{\varphi_A}$ est triangulaire par blocs et chaque bloc est une matrice d'ordre la dimension de $\boldsymbol{E_u(\lambda_k)}$.

c/ De la question précédente la dimension cherché est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \boldsymbol{m_k^2}$.

d/ u est diagonalisable donc $\sum_{k=1}^{p} m_k = 7$ entraîne $1 \leqslant p \leqslant 7$. Notons $d = \sum_{k=1}^{p} m_k^2$.

Les valeurs possibles de d sont : $7-9-11-13-15-17-19-21-25-27-29-37-49$.

Partie VI. Étude des vecteurs propres de φ_A associés à une valeur propre non nulle.

12°. La relation est évidente pour $k = 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $j \in [\![0; k-1]\!]$, de la relation $AB - BA = \alpha B$, on en déduit $B^j AB^{k-j} - B^{j+1}AB^{k-1-j} = \alpha B^k$ en multipliant la relation précédente à droite par B^{k-1-j} et à gauche par B^j, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1}(B^j AB^{k-j} - B^{j+1}AB^{k-1-j}) = \alpha k B^k &\implies \sum_{j=0}^{k-1} B^j AB^{k-j} - \sum_{j=1}^{k} B^j AB^{k-j} = \alpha k B^k \\
&\implies AB^k - B^k A = \alpha k B^k
\end{aligned}$$

13°. Posons $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$

$$\varphi_A(P(B)) = AP(B) - P(B)A = \sum_{k=0}^{m} a_k(AB^k - B^k A) = \alpha \sum_{k=0}^{m} a_k k B^k = \alpha \sum_{k=1}^{m} a_k k B^{k-1} B$$

Donc $\varphi_A(P(B)) = \alpha P(B).B$

14°. Remarquons que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est de degré $\leqslant d-1$, de plus c'est un annulateur de B, en effet $B.\pi'_B(B) - d\pi_B(B) = B.\pi'_B(B) = \dfrac{1}{\alpha}(\varphi_A(\pi_B(B))) = 0$

15°. Posons $\pi_B = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où $a_d = 1$. De la question précédente on en déduit que :

$$\begin{aligned}
X\pi'_B = d\pi_B &\implies \sum_{k=0}^{d} k a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} d a_k X^k \\
&\implies \forall k \in [\![0, d]\!] \;\; k a_k = d a_k \\
&\implies \forall k \in [\![0, d-1]\!] \;\; a_k = 0
\end{aligned}$$

Donc $\pi_B = X^d$, conclusion $B^d = 0$.

sadikoulmeki@yahoo.fr