CCP MP 2005 - MATH 2
Durée : 4 heures
calculatrices interdites

RACINES CARREES DE MATRICES

Notations.
Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note : $M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles de taille n.
$M_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne.
$GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.
I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.
Id l'application identité de $\mathbb{R}^n$.
Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée.
$S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.
$S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$, c'est à dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.

Si $x_1, \dots, x_n$ sont des réels, on note $diag(x_1, \dots, x_n)$ la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $x_1, \dots, x_n$ dans cet ordre.

Si p est un entier naturel non nul, on notera $\|.\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^p$:
si $x = (x_1, \dots, x_p)$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.
Si $a \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$, on note $B_\infty(a, r)$ la boule ouverte de centre a de rayon r pour la norme $\|.\|_\infty$.

Objectifs.
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R de $M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrées de A si $R^2 = A$.
On note $Rac(A)$ l'ensemble des racine carrées de A, c'est à dire

$$Rac(A) = \{R \in M_n(\mathbb{R}) /\ R^2 = A\}$$

Le problème propose de déterminer les racines carrées de A dans différents exemples, (on pourra constater qu'une matrice peut parfois admettre une infinité de racines) et étudier quelques propriétés topologiques de $Rac(A)$.

Les trois parties du problème sont **indépendantes.**
Les trois premiers exemples de la partie I sont tous **indépendants**.

I. Détermination de $Rac(A)$ dans quelques exemples.

Exemple 1 : cas où A possède n valeurs propres distinctes.
On suppose que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

1. Justifier l'existence d'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, puis montrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

2. Racines carrées de D.
   Soit S une racine carrées de D.

   a. Montrer que $DS = SD$.

b. En déduire que la matrice S est diagonale.

c. On note alors $S = diag(s_1, \dots, s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in \{1, \dots, n\}$?

d. Que peut-on dire de $Rac(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative ?

e. Si on suppose toutes les valeurs propres de A positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

3. Ecrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées A admet-elle ? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).

4. Application : Ecrire toutes les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice P que l'on déterminera.

Exemple 2 : cas où A est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.
Dans cet exemple, on cherche à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.
Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée de la matrice nulle.

5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note r le rang de f.

   a. Comparer $Im(f)$ et $Ker(f)$ puis montrer que $r \leq \frac{n}{2}$.

   b. On suppose f non nul, donc $r \geq 1$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $Im(f)$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ pour former une base de $Ker(f)$. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on note u_i le vecteur tel que $f(u_i) = e_i$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-r}, u_1, \dots, u_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puis écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On notera M_r cette matrice.

6. a. Déterminer les racines carrées dans $M_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle.

   b. Application : déterminer dans $M_4(\mathbb{R})$, les racines carrées de la matrice nulle.

Exemple 3 : cas où $A = I_n$.

7. Soit R une racine carrée de l'unité I_n.

   a. Vérifier que R est une matrice inversible.

   b. Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.

8. Déterminer $Rac(I_n)$. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exemple 4 : cas où A est une matrice symétrique réelle.
Dans cet exemple, toutes les matrices que l'on considérera appartiennent à $M_n(\mathbb{R})$.

9. Une matrice symétrique admet-elle nécessairement une racine carrée ?

10. Montrer qu'une matrice symétrique positive admet au moins une racine carrée qui est elle même symétrique et positive.

Remarque : On peut montrer l'unicité de cette racine carrée dans $S_n^+(\mathbb{R})$ mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème.

II. Etude topologique de $Rac(A)$.

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui a pour coefficients $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on définit une norme en posant $N(A) = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de cette norme N.

11. Fermeture de $Rac(A)$.
    Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Rac(A)$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

12. Etude du caractère borné de $Rac(I_n)$.

    a. Un exemple instructif.
       Pour tout entier naturel q, on pose $S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}$. Calculer S_q^2. $Rac(I_2)$ est-elle une partie bornée de $M_2(\mathbb{R})$?

    b. $Rac(I_n)$ est-elle une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$?

    c. Application : pour cette question, $n \geq 2$.
       Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|.\|$ "surmultiplicative" sur $GL_n(\mathbb{R})$, c'est à dire vérifiant pour tous A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \geq \|A\|.\|B\|$.

III. Zéros de fonctiosn polynomiales. Application à la détermination de l'intérieur de $Rac(A)$.

Soit p un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie $\|.\|_\infty$.
On note Γ_p l'ensemble des **fonctions polynomiales** sur $\mathbb{R}^p$ c'est à dire : si $P \in \Gamma_p$, il existe N entier naturel et une famille de réels $\{a_{i_1,\ldots,i_p},\ 0 \leq i_1,\ldots,i_p \leq N\}$ tels que

$$\forall (x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p,\ P(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{0\leq i_1,\ldots,i_p\leq N} a_{i_1,\ldots,i_p} x^{i_1} \ldots x^{i_p}$$

Par exemple si $p = 3$, $P(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 3x_1x_2x_3 + 4x_2^5$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^3$.
Si $p = 1$, Γ_1 est l'ensemble des fonctions polynômes se $\mathbb{R}$.
Enfin, si $p \in \Gamma_p$, on pose $Z(P) = \{(x_1,\ldots,x_p) \in \mathbb{R}^p /\ P(x_1,\ldots,x_p) = 0\}$ ($Z(P)$ est **l'ensemble des zéros de la fonction polynomiale** P).

L'objectif de cette partie est d'étudier l'intérieur de $Z(P)$, afin de déterminer l'intérieur de $Rac(A)$.

On rappelle que si Ω est une partie de $\mathbb{R}^p$, un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ est un point intérieur à Ω s'il existe un nombre réel r strictement positif tel que $B_\infty(a,r) \subset \Omega$ et que l'intérieur d'une partie est l'ensemble de ses points intérieurs.

13. Questions préliminaires :

    a. Soit $a = (a_1,\ldots,a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$. Montrer que $B_\infty(a,r)$ peut s'écrire comme produit de p intervalles.

    b. Soient F et G deux parties de $\mathbb{R}^p$. On suppose que F et G sont d'intérieur vide, montrer que $F \cap G$ est encore d'intérieur vide.

14. Exemples d'ensembles de zéros de fonctions polynomiales.

    a. Dans cette question, $p = 1$. Soit P une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$. Dans quel cas $Z(P)$ est-il infini ? Justifier votre réponse.

    b. Dans cette question, $p = 2$. On considère $P(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2 - 1$ et $Q(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2$. Représenter graphiquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $Z(P)$ et $Z(Q)$. $Z(P)$ et $Z(Q)$ sont-il infinis ?

15. Intérieur de l'ensemble des zéros d'une fonction polynomiale.
Soit $P \in \Gamma_p$.

   a. Soient $I_1, \dots, I_p$ des parties infinies de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence que si la fonction polynomiale P s'annule sur $I_1 \times \cdots \times I_p$, alors P est la fonction nulle.
   b. En déduire que si P s'annule sur une partie d'intérieur non vide, P est la fonction nulle.
   c. Si l'on suppose que P n'est pas la fonction nulle, que vaut l'intérieur de $Z(P)$?

16. Application à l'étude de l'intérieur de $Rac(A)$.
Dans cette question, on confondra les espaces vectoriels $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$. Par exemple, on prendra la liberté d'écrire que pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, sans se soucier de l'ordre des termes.
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

   a. Ecrire $Rac(A)$ sous forme d'un ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$ puis montrer qu'il existe des éléments $P_1, \dots, P_{n^2}$ de Γ_{n^2} tels que $Rac(A) = \displaystyle\bigcap_{l=1}^{n^2} Z(P_l)$.
   b. Déterminer l'intérieur de $Rac(A)$.