SESSION 2004

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE – FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices ***sont interdites****.*

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Fonctions de matrices

Notations :

1. Les $\mathbb{R}$-algèbres suivantes sont considérées au cours de ce texte :
   - ▶ L'algèbre $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre n.
   - ▶ Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, on note C_I^∞ l'algèbre commutative des fonctions de classe C^∞ de I dans $\mathbb{R}$.
   - ▶ L'algèbre des fonctions polynomiales de I dans $\mathbb{R}$ est usuellement identifiée à l'algèbre $\mathbb{R}[X]$.
2. On y rencontre aussi les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants :
   - ▶ L'espace des colonnes réelles à n lignes noté $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
   - ▶ L'espace $\mathbb{R}_N[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leqslant N\}$, où $N \in \mathbb{N}$.
3. Les notions de convergence dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{R})$ sont relatives aux normes respectives :
   - ▶ $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$, si $X = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$.
   - ▶ $\|M\| = n \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}|$, si $M = [m_{i,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Objectifs du problème

Lorsque $P \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$, on sait donner un sens à la matrice $P(A)$ et l'on maîtrise bien le calcul polynomial sur A qui en résulte. En particulier, si M est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on appelle POLYNÔME MINIMAL de M le polynôme unitaire P de plus bas degré tel que $P(M) = 0$; il est immédiat (et on l'admettra) qu'il s'agit du polynôme minimal de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Dans un premier temps, ce texte propose de donner un sens à la matrice $f(A)$ POUR TOUTE FONCTION f DE CLASSE C^∞, et cela moyennant des hypothèses convenables sur la matrice A.
Autrement dit, on apprend à maîtriser un certain calcul fonctionnel sur A.
Dans un second temps, on exploite ces résultats pour résoudre un système différentiel linéaire.

Notations fixées pour tout le problème :

- ▶ On considère une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ et l'on SUPPOSE que son polynôme minimal Π_A peut être écrit sous la forme : $\Pi_A(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} \dots (X-\lambda_r)^{m_r}$ avec : $r \geqslant 1$; les λ_j sont des RÉELS distincts ; les m_j sont dans $\mathbb{N}^*$. On note alors $m = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} m_j$ le degré de Π_A.
- ▶ On considère aussi un intervalle I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide et contenant tous les λ_j.

La matrice A et l'intervalle I sont particularisés dans les divers exemples traités au cours du problème.

Préliminaires :

1. Établir que pour X dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et M dans $M_n(\mathbb{R})$, on a : $\|MX\|_\infty \leqslant \|M\| \ \|X\|_\infty$.

2. Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace vectoriel de dimension $d \geqslant 1$ de $M_n(\mathbb{R})$, et soit $\beta = (B_1, \dots, B_d)$ une base de $\mathcal{M}$.

a) Montrer que l'on définit une norme $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{M}$ en posant $\mathcal{N}(M) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant d} |x_k|$, si $M = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant d} x_k B_k$ est la décomposition de l'élément M de $\mathcal{M}$ sur la base β.

b) Justifier l'existence de constantes réelles strictement positives a et b vérifiant :
$\forall M \in \mathcal{M}, a\,\|M\| \leqslant \mathcal{N}(M) \leqslant b\,\|M\|$.

c) Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$; on note $M_p = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant d} x_p(k) B_k$ la décomposition de M_p sur β. Montrer que la suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ si et seulement si CHAQUE SUITE RÉELLE $(x_p(k))_{p\in\mathbb{N}}$ $(k = 1, \dots, d)$ converge vers 0.

I Une relation d'équivalence sur C_I^∞

On convient de dire que des fonctions f et g de C_I^∞ « coïncident sur le spectre de A » lorsque :
$\forall j \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}, f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j)$. Ce que l'on résume par la notation $f \underset{A}{=} g$.
Un exemple : si $\Pi_A(X) = X^2(X+1)$ la notation $f \underset{A}{=} g$ signifie : $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$ et $f(-1) = g(-1)$

3. Soient ℓ dans $\mathbb{N}^*$, λ dans I et f dans C_I^∞ vérifiant : $f^{(k)}(\lambda) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, \dots, \ell - 1$.

a) Établir l'identité : $\forall x \in I, f(x) = \displaystyle\int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u)\ \mathrm{d}u$.

b) En déduire à l'aide d'un changement de variable, l'existence d'une fonction h vérifiant :
(1) $\forall x \in I, f(x) = (x-\lambda)^\ell h(x)$
(2) $h \in C_I^\infty$

4. Soient f et g dans C_I^∞.

a) On suppose : $\exists h \in C_I^\infty, f = g + h\Pi_A$.
En considérant les dérivées successives de $f - g$, établir que $f \underset{A}{=} g$.

b) On suppose $f \underset{A}{=} g$; en exploitant le **3.** justifier l'existence de h dans C_I^∞ vérifiant : $f = g + h\Pi_A$.

5. Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$; prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) $P \underset{A}{=} Q$
(2) $\exists H \in \mathbb{R}[X], P = Q + H\Pi_A$.

II Définition de la matrice $f(A)$

A. On considère l'application φ de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^m$ qui associe à un polynôme P le m-uplet :

$$\varphi(P) = \Big(\left(P^{(k_1)}(\lambda_1)\right)_{0 \leqslant k_1 \leqslant m_1 - 1}, \dots, \left(P^{(k_r)}(\lambda_r)\right)_{0 \leqslant k_r \leqslant m_r - 1} \Big).$$

6. Établir le caractère bijectif de φ.

7. Soit f dans C_I^∞ ; justifier l'existence d'un et d'un seul polynôme P_f de $\mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à $(m-1)$ et tel que : $f \underset{A}{=} P_f$. On convient alors de DÉFINIR la matrice $f(A)$ en posant : $f(A) = P_f(A)$.

B. Quelques exemples

8. On suppose ici que f est polynomiale et l'on écrit : $\forall x \in I, f(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$.

En effectuant une division euclidienne, montrer qu'avec la définition de la question **7**, on obtient le résultat naturel : $f(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$.

9. ICI : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ et $I = \mathbb{R}$.

a) Calculer $\Pi_A(X)$.

b) Calculer la matrice $f(A)$ dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x) = ax + b$, les réels a et b étant donnés.
(2) $f(x) = \sin(\pi x)$
(3) $f(x) = (x-1)^2 g(x)$, où la fonction g est donnée dans C_I^∞.

III - Le calcul systématique de $f(A)$

A. Une formule générale

10. En exploitant l'isomorphisme linéaire φ du **II.A**, justifier l'existence et l'unicité de polynômes $Q_{j,k}$ $(1 \leqslant j \leqslant r, 0 \leqslant k \leqslant m_j - 1)$ vérifiant :

pour TOUTE fonction f de C_I^∞, on a : $P_f = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k}$

On considère alors les matrices dites « associées » à A :

$Z_{j,k} = Q_{j,k}(A) \quad (1 \leqslant j \leqslant r, 0 \leqslant k \leqslant m_j - 1)$.

11. Montrer que les diverses matrices $Z_{j,k}$ sont linéairement indépendantes et que :

$\forall f \in C_I^\infty, f(A) = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant r} \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$.

B. Deux exemples

12. ICI : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$.

a) Justifier l'existence de matrices Z_1 et Z_2 de $M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall f \in C_I^\infty, f(A) = f(1) Z_1 + f'(1) Z_2.$$

b) EN DÉDUIRE le calcul de Z_1 et Z_2.

c) Calculer les matrices A^{2004}, $\sqrt{A}$ et plus généralement A^α pour α dans $\mathbb{R}_+^*$.

13. ICI : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ et $I = \mathbb{R}$.

a) Présenter sous forme factorisée le polynôme $\Pi_A(X)$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

b) Calculer les matrices $Z_{j,k}$ « associées » à A.

IV Un calcul fonctionnel sur la matrice A

A. Quelques identités bien naturelles

14. Soient f et g dans C_I^∞ et α dans $\mathbb{R}$.

a) Que valent $P_{\alpha f}$ et P_{f+g} ?

b) Justifier l'existence d'un polynôme H de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $P_{fg} = P_f P_g + H\Pi_A$.

15. **a)** Montrer que l'application $S : f \mapsto f(A)$ de C_I^∞ dans $M_n(\mathbb{R})$ est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres.

b) Quel est son noyau ?

16. On considère les fonctions cosinus et sinus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, puis les fonctions $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. On peut ainsi DÉFINIR les matrices $\cos A$, $\sin A$, et même $\sqrt{A}$ et $\dfrac{1}{A}$ si les λ_j sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

a) En exploitant le morphisme S, calculer $(\cos A)^2 + (\sin A)^2$.

b) On suppose ici que les λ_j sont strictement positifs. Reconnaître : $\left(\sqrt{A}\right)^2$ et $\dfrac{1}{A}$.

B. Le spectre de $f(A)$

17. Montrer que l'ensemble noté $\mathcal{M}_A = \{f(A) \mid f \in C_I^\infty\}$ est une sous-algèbre COMMUTATIVE de $M_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

18. Montrer que si un élément de $\mathcal{M}_A$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$ alors son inverse est aussi dans $\mathcal{M}_A$.

19. Soit f dans C_I^∞ ; établir l'équivalence des énoncés suivants :

(1) $f(A)$ est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$.

(2) $\forall j \in \{1, \ldots, r\}, f(\lambda_j) \neq 0$

20. Si M est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on note Λ_M l'ensemble de ses valeurs propres RÉELLES.

En exploitant la question **19** comparer les ensembles : Λ_A et $\Lambda_{f(A)}$ où f est donnée dans C_I^∞ .

V Application à la résolution d'un système différentiel

21. Soient $(f_p)_{\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de C_I^∞ et f dans C_I^∞. Établir l'équivalence des énoncés suivants :

(1) La suite de matrices $(f_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $M_n(\mathbb{R})$ vers $f(A)$.

(2) Pour chaque j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ et chaque k $(0 \leqslant k \leqslant m_j - 1)$, la suite réelle $\left(f_p^{(k)}(\lambda_j)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $f^{(k)}(\lambda_j)$.

Lorsque la condition (2) est réalisée, on convient de dire que la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ « converge vers f sur le spectre de A ».

22. Pour t réel, on considère la fonction $f_t : x \mapsto e^{tx}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$f_t(A) = \sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} \dfrac{t^\ell}{\ell!} A^\ell$. Il s'agit donc précisément de la matrice usuellement notée $\exp(tA)$.

23. En exploitant les résultats acquis à ce stade du problème, résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y \end{cases}$$

Fin de l'énoncé.