

# Concours Communs Polytechniques 2004

## Corrigé de l'épreuve de Mathématiques 2

### Préliminaires

1. En notant  $x_i$  et  $m_{i,j}$  les coefficients des matrices  $X$  et  $M$ , nous avons :

$$\|MX\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| |x_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\|M\|}{n} \|X\|_\infty = \|M\| \|X\|_\infty.$$

2.a) L'application  $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathcal{M}$  est un isomorphisme d'espace vectoriel ; comme  $\mathcal{N}$  est l'image

$$(x_1, \dots, x_d) \longmapsto \sum_{k=1}^d x_k B_k$$

par cet isomorphisme de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{N}$  est une norme sur  $\mathcal{M}$ .

2.b)  $\mathcal{N}$  et la restriction de  $\|\cdot\|$  à  $\mathcal{M}$  sont deux normes équivalentes sur  $\mathcal{M}$  (les normes d'un espace de dimension finie sont toutes équivalentes) : il existe donc  $a$  et  $b$  réels strictement positifs tels que  $a\|M\| \leq \mathcal{N}(M) \leq b\|M\|$  pour tout  $M \in \mathcal{M}$ .

2.c) D'après les inégalités précédentes,  $M_p$  tend vers 0 dans  $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$  si et seulement si  $M_p$  tend vers 0 dans  $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ . Comme l'application définie à la question 2.a) est une isométrie, cette condition est elle-même équivalente à la convergence de  $(x_p(1), \dots, x_p(d))$  vers 0 dans  $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ , ce qui donne bien le résultat demandé.

### I - Une relation d'équivalence sur $C_I^\infty$

3.a) Soit  $x \in I$ . Comme  $f$  est de classe  $C^\ell$  sur  $[\lambda, x]$ , on peut lui appliquer le théorème de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} (x-\lambda)^k + \int_\lambda^x \frac{(x-u)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}(u) du$$

ce qui est l'égalité demandée, puisque  $f^{(k)}(\lambda) = 0$  pour  $k$  compris entre 0 et  $\ell-1$ .

3.b) En effectuant le changement de variable  $u = (1-t)\lambda + tx$  dans l'intégrale précédente, nous obtenons :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\ell-1} (x-\lambda)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((1-t)\lambda + tx) (x-\lambda) dt = (x-\lambda)^\ell h(x)$$

en posant  $h(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((1-t)\lambda + tx) dt$  pour tout  $x$  de  $I$ .

Montrons par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}_n : h \text{ est de classe } C^n \text{ sur } I \text{ et } \forall x \in I, h^{(n)}(x) = \int_0^1 \frac{t^n (1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell+n)}((1-t)\lambda + tx) dt.$$

- Comme l'application  $(t, x) \mapsto \frac{(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell)}((1-t)\lambda + tx)$  est continue sur  $[0, 1] \times I$ ,  $h$  est continue sur  $I$  (théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale sur un segment):  $\mathcal{P}_0$  est donc vérifiée.
- Soit  $n \geq 0$  et supposons  $\mathcal{P}_n$  vérifiée. Notons, pour  $(t, x) \in [0, 1] \times I$ :

$$\varphi(t, x) = \frac{t^n(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell+n)}((1-t)\lambda + tx)$$

L'application  $\varphi$  est continue sur  $[0, 1] \times I$ , dérivable par rapport à  $x$  sur  $[0, 1] \times I$  et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : (t, x) \mapsto \frac{t^{n+1}(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell+n+1)}((1-t)\lambda + tx)$$

est continue sur  $[0, 1] \times I$ . Le théorème de dérivation sous le signe intégrale s'applique:  $h^{(n)}$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ , donc  $h$  est de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$ , avec

$$\forall x \in I, h^{(n+1)}(x) = \int_0^1 \frac{t^{n+1}(1-t)^{\ell-1}}{(\ell-1)!} f^{(\ell+n+1)}((1-t)\lambda + tx) dt$$

L'hypothèse de récurrence est donc héréditaire et  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$ .

- 4.a)** La formule de Leibniz donne, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(f - g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Pi_A^{(i)} h^{(k-i)}$ . Pour  $j \in \{1, \dots, r\}$  et  $k \in \{0, \dots, m_j - 1\}$ , nous avons donc:

$$f^{(k)}(\lambda_j) - g^{(k)}(\lambda_j) = (f - g)^{(k)}(\lambda_j) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \underbrace{\Pi_A^{(i)}(\lambda_j)}_{\substack{=0 \text{ car} \\ i \leq k \leq m_j - 1}} h^{(k-i)}(\lambda_j) = 0$$

ce qui est la définition de  $f \equiv_A g$ .

- 4.b)** Montrons par récurrence sur  $r$  la propriété:

$\mathcal{H}_r$ : si  $f$  est un élément de  $C_I^\infty$ , si  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont  $r$  éléments distincts de  $I$  et si  $m_1, \dots, m_r$  sont des entiers naturels non nuls tels que:

$$\forall j \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}, f^{(k)}(\lambda_j) = 0$$

alors il existe  $h \in C_I^\infty$  tel que

$$\forall x \in I, f(x) = \prod_{j=1}^r (x - \lambda_j)^{m_j} h(x).$$

Quand  $r = 0$ , il suffit de choisir  $h = f$ . Soit ensuite  $r \geq 0$  et supposons la propriété démontrée au rang  $r$ . On suppose ensuite que  $f, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, m_1, \dots, m_r, m_{r+1}$  sont donnés, vérifiant les hypothèses de la propriété  $\mathcal{H}_{r+1}$ . En appliquant  $\mathcal{H}_r$ , on sait qu'il existe  $h_1 \in C_I^\infty$  tel que:

$$\forall x \in I, f(x) = \underbrace{\prod_{j=1}^r (x - \lambda_j)^{m_j}}_{= P(x)} h_1(x).$$

En posant  $\lambda = \lambda_{r+1}$  et  $\ell = m_{r+1}$ , la formule de Leibniz donne :

$$\forall k \in \{0, \dots, \ell - 1\}, 0 = f^{(k)}(\lambda) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P^{(k-i)}(\lambda) h_1^{(i)}(\lambda),$$

ce qui s'écrit sous forme d'un système linéaire :

$$\begin{cases} P(\lambda)h_1(\lambda) = 0 \\ P'(\lambda)h_1(\lambda) + P(\lambda)h_1'(\lambda) = 0 \\ P''(\lambda)h_1(\lambda) + 2P'(\lambda)h_1'(\lambda) + P(\lambda)h_1''(\lambda) = 0 \\ \vdots \\ P^{(\ell-1)}(\lambda)h_1(\lambda) + \dots + \binom{\ell-1}{\ell-2} P'(\lambda)h_1^{(\ell-2)}(\lambda) + P(\lambda)h_1^{(\ell-1)}(\lambda) = 0 \end{cases}$$

Comme  $\lambda$  est distinct des  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ,  $P(\lambda)$  est non nul : en résolvant ce système triangulaire, nous obtenons donc  $h_1(\lambda) = h_1'(\lambda) = \dots = h_1^{(\ell-1)}(\lambda) = 0$ . La question **3.** assure alors l'existence de  $h$  dans  $C_I^\infty$  tel que  $h_1(x) = (x - \lambda)^\ell h(x)$  pour tout  $x \in I$ , ce qui donne la décomposition cherchée :

$$\forall x \in I, f(x) = \left( \prod_{j=1}^{r+1} (x - \lambda_j)^{m_j} \right) h(x)$$

Si  $f \equiv_A g$ , il suffit alors d'appliquer la propriété  $\mathcal{H}_r$  à la fonction  $f - g$  : il existe  $h$  dans  $C_I^\infty$  tel que  $f = g + h\Pi_A$ .

**5.** C'est une application directe du cours sur les polynômes :

$$\begin{aligned} P \equiv_A Q &\iff \forall j \in \{1, \dots, r\}, \lambda_j \text{ est racine d'ordre au moins } m_j \text{ de } P - Q \\ &\iff \prod_{j=1}^r (X - \lambda_j)^{m_j} \text{ divise } P - Q \\ &\iff \exists H \in \mathbb{R}[X], P = Q + H\Pi_A \end{aligned}$$

On peut aussi dire que (2)  $\implies$  (1) d'après le **4.a**), puis remarquer que dans le **3.**, on a  $h \in \mathbb{R}[X]$  quand  $f \in \mathbb{R}[X]$  : il suffit donc d'affiner la preuve du **4.b**) pour obtenir (1)  $\implies$  (2).

## II - Définition de la matrice $f(A)$

**6.**  $\varphi$  est clairement linéaire. D'autre part, si  $P$  est élément de  $\text{Ker}(\varphi)$ , on a  $P \equiv_A 0$  : le **5.** prouve donc que  $P = H\Pi_A$  avec  $H \in \mathbb{R}[X]$ , soit  $P = 0$  car  $P$  est de degré strictement plus petit que celui de  $\Pi_A$ . Ainsi,  $\varphi$  est injective ; comme  $\mathbb{R}_{m-1}[X]$  et  $\mathbb{R}^m$  ont même dimension finie,  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}_{m-1}[X]$  sur  $\mathbb{R}^m$ .

**7.** On a, pour  $P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$  :

$$f \equiv_A P \iff \varphi(P) = \left( \left( f^{(k_1)}(\lambda_1) \right)_{0 \leq k_1 \leq m_1 - 1}, \dots, \left( f^{(k_r)}(\lambda_r) \right)_{0 \leq k_r \leq m_r - 1} \right).$$

Il existe donc un unique polynôme  $P_f$  vérifiant les propriété imposée : ce polynôme est l'image réciproque de  $\left( \left( f^{(k_1)}(\lambda_1) \right)_{0 \leq k_1 \leq m_1 - 1}, \dots, \left( f^{(k_r)}(\lambda_r) \right)_{0 \leq k_r \leq m_r - 1} \right)$  par la bijection  $\varphi$ .

8. Comme  $f$  et  $P_f$  sont deux polynômes tels que  $f \stackrel{A}{=} P_f$ , il existe d'après la question 5. un polynôme  $H$  tel que  $f = P_f + H\Pi_A$ . Le calcul polynômial habituel donne alors

$$\sum_{k=0}^N a_k A^k = P_f(A) + H(A)\Pi_A(A) = P_f(A)$$

puisque  $\Pi_A(A) = 0$ . Ainsi, la notation  $f(A)$  n'est pas ambiguë : quand  $f$  est un polynôme, la "nouvelle" définition de  $f(A)$  coïncide avec l'"ancienne" définition.

- 9.a) Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $(X-1)^2$ , donc  $\Pi_A$  divise  $(X-1)^2$ . Comme  $A$  est distincte de la matrice identité,  $\Pi_A = (X-1)^2$ .

- 9.b) Pour  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $P_f$  est le polynôme  $f(1) + f'(1)(X-1)$ . Nous obtenons donc :

(1) pour  $f(x) = ax + b$ ,  $P_f = f$  donc  $f(A) = aA + bI_2 = \begin{pmatrix} 5a + b & -4a \\ 4a & -3a + b \end{pmatrix}$  ;

(2) pour  $f(x) = \sin(\pi x)$ ,  $f(1) = 0$  et  $f'(1) = -\pi$  donc  $f(A) = -\pi(A - I_2) = 4\pi \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  ;

(3) pour  $f(x) = (x-1)^2 g(x)$ ,  $f(1) = f'(1) = 0$  donc  $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

### III - Le calcul systématique de $f(A)$

10. On a vu que  $P_f = \varphi^{-1} \left( f(\lambda_1), f'(\lambda_1), \dots, f^{(m_1-1)}(\lambda_1), \dots, f(\lambda_r), f'(\lambda_r), \dots, f^{(m_r-1)}(\lambda_r) \right)$ . Par linéarité de  $\varphi^{-1}$ , et en notant  $(e_1, \dots, e_m)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ , nous avons donc :

$$\begin{aligned} P_f &= f(\lambda_1)\varphi^{-1}(e_1) + \dots + f^{(m_1-1)}(\lambda_1)\varphi^{-1}(e_{m_1}) \\ &\quad + f(\lambda_2)\varphi^{-1}(e_{m_1+1}) + \dots + f^{(m_2-1)}(\lambda_2)\varphi^{-1}(e_{m_1+m_2}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + f(\lambda_r)\varphi^{-1}(e_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}) + \dots + f^{(m_r-1)}(\lambda_r)\varphi^{-1}(e_{m_1+\dots+m_r}) \end{aligned}$$

Nous obtenons la décomposition demandée en posant :

$$\forall j \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}, Q_{j,k} = \varphi^{-1}(e_{m_1+\dots+m_{j-1}+k+1}).$$

Supposons qu'il existe une autre famille  $\tilde{Q}_{j,k}$  vérifiant la propriété demandée. Pour  $j_0 \in \{1, \dots, r\}$  et  $k_0 \in \{0, \dots, m_{j_0} - 1\}$ , choisissons alors  $f = Q_{j_0, k_0}$ . Comme  $f$  est un polynôme de degré au plus  $m$ ,  $P_f = f$  et la décomposition de  $P_f$  donne :

$$Q_{j_0, k_0} = f = P_f = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) \tilde{Q}_{j,k} = \tilde{Q}_{j_0, k_0}$$

$$\text{car } f^{(k)}(\lambda_j) = Q_{j_0, k_0}^{(k)}(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = j_0 \text{ et } k = k_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il existe donc une et une seule famille  $Q_{j,k}$  vérifiant

$$\forall f \in C_I^\infty, P_f = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k}.$$

**Remarque :** la famille  $(Q_{j,k})$  est la base duale (ou préduale, ou antéduale selon les goûts) associée à la base de  $(\mathbb{R}_{m-1}[X])^*$  constituée par les formes linéaires :

$$u_{j,k} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{m-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P^{(k)}(\lambda_j) \end{array}$$

**11.** Considérons l'ensemble  $\mathcal{M} = \{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\}$ .  $\mathcal{M}$  est clairement un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$ , et la famille  $(A^0, A^1, \dots, A^{m-1})$  est une base de  $\mathcal{M}$  :

- la famille est libre car si  $\alpha_0 A^0 + \dots + \alpha_{m-1} A^{m-1} = 0$ , le polynôme  $\alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{m-1} X^{m-1}$  est divisible par  $\Pi_A$  qui est de degré  $m$  : ceci impose à tous les  $\alpha_i$  d'être nuls ;
- pour  $B = P(A) \in \mathcal{M}$ , on a  $B = R(A)$  ou  $R$  est le reste dans la division euclidienne de  $P$  par  $\Pi_A$ , et donc  $B$  est combinaison linéaire de la famille  $(A^0, A^1, \dots, A^{m-1})$ .

Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , nous pouvons ensuite écrire :

$$P(A) = P_P(A) = \left( \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} P^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k} \right) (A) = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} P^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}.$$

Ceci prouve que la famille  $(Z_{j,k})$  engendre  $\mathcal{M}$  : comme son cardinal  $m$  est égal à la dimension de  $\mathcal{M}$ , cette famille est une base de  $\mathcal{M}$  et c'est en particulier une famille libre de  $M_n(\mathbb{R})$ .

D'autre part, pour  $f$  élément de  $C_I^\infty$  :

$$f(A) = \left( \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Q_{j,k} \right) (A) = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}.$$

**12.a)** Nous avons dans cet exemple  $r = 1$  et  $m_1 = 2$  : le résultat découle donc de la question **11.**, avec  $Z_1 = Z_{1,0}$  et  $Z_2 = Z_{1,1}$ .

**12.b)** Avec  $f(x) = 1$ , nous obtenons  $I_2 = f(A) = Z_1$  ; avec  $f(x) = x$ , nous avons cette fois  $A = f(A) = Z_1 + Z_2$ , soit

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = A - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

**12.c)** Nous obtenons donc :

- avec  $f(x) = x^{2004}$  et  $I = \mathbb{R}$  :

$$A^{2004} = f(A) = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2 = Z_1 + 2004Z_2 = \begin{pmatrix} 8017 & -8016 \\ 8016 & -8015 \end{pmatrix}.$$

- avec  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $I = ]0, +\infty[$  :

$$\sqrt{A} = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2 = Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- avec  $f(x) = x^\alpha$  et  $I = ]0, +\infty[$  :

$$\sqrt{\alpha} A = f(1)Z_1 + f'(1)Z_2 = Z_1 + \alpha Z_2 = \begin{pmatrix} 1 + 4\alpha & -4\alpha \\ 4\alpha & 1 - 4\alpha \end{pmatrix}.$$

- 13.a)** Le polynôme caractéristique de  $A$  est  $\chi_A = X^2(X+1)$  donc  $\Pi_A$  peut être égal soit à  $X^2(X+1)$ , soit à  $X(X+1)$ . Comme  $A(A+I_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ ,  $\Pi_A = X^2(X+1)$ .

Comme  $\Pi_A$  a une racine double,  $A$  n'est pas diagonalisable (ni sur  $\mathbb{R}$ , ni sur  $\mathbb{C}$ ).

- 13.b)** Dans cet exemple,  $r = 2$ ,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $m_1 = 2$  et  $m_2 = 1$ . On en déduit donc :

$$\forall f \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}, f(A) = f(0)Z_{1,0} + f'(0)Z_{1,1} + f(-1)Z_{2,0}.$$

Avec  $f : x \mapsto x^2$ , nous obtenons  $A^2 = Z_{2,0}$ , soit  $Z_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Avec  $f : x \mapsto x(1+x)$ , nous obtenons  $A(I_2 + A) = Z_{1,1}$ , soit  $Z_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Enfin,  $f : x \mapsto 1+x$  donne  $I_2 + A = Z_{1,0} + Z_{1,1}$ , soit  $Z_{1,0} = I_2 - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

## IV - Un calcul fonctionnel sur la matrice $A$

- 14.a)** On a  $\alpha P_f, P_f + P_g \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$  et, pour  $j \in \{1, \dots, r\}$  et  $k \in \{0, \dots, m_j - 1\}$  :

$$\begin{cases} (\alpha f)^{(k)}(\lambda_j) = \alpha f^{(k)}(\lambda_j) = \alpha P_f^{(k)}(\lambda_j) = (\alpha P_f)^{(k)}(\lambda_j) \\ (f+g)^{(k)}(\lambda_j) = f^{(k)}(\lambda_j) + g^{(k)}(\lambda_j) = P_f^{(k)}(\lambda_j) + P_g^{(k)}(\lambda_j) = (P_f + P_g)^{(k)}(\lambda_j) \end{cases}$$

donc  $P_{\alpha f} = \alpha P_f$  et  $P_{f+g} = P_f + P_g$ .

- 14.b)** Pour  $j \in \{1, \dots, r\}$  et  $k \in \{0, \dots, m_j - 1\}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} (P_f P_g)^{(k)}(\lambda_j) &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} P_f^{(\ell)}(\lambda_j) P_g^{(k-\ell)}(\lambda_j) \\ &= \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} f^{(\ell)}(\lambda_j) g^{(k-\ell)}(\lambda_j) \\ &= (fg)^{(k)}(\lambda_j) \\ &= P_{fg}^{(k)}(\lambda_j) \end{aligned}$$

donc  $P_f P_g \equiv_A P_{fg}$ . D'après la question 5., il existe  $H \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P_{fg} = P_f P_g + H \Pi_A$ .

- 15.a)** Cela découle des propriétés ci-dessus :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in C_I^{\infty}, \begin{cases} S(\alpha f) = P_{\alpha f}(A) = (\alpha P_f)(A) = \alpha P_f(A) = \alpha S(f) \\ S(f+g) = P_{f+g}(A) = (P_f + P_g)(A) = P_f(A) + P_g(A) = S(f) + S(g) \\ S(fg) = P_{fg}(A) = (P_f P_g + \Pi_A H)(A) = P_f(A) P_g(A) = S(f) S(g) \end{cases}$$

où  $H$  est le polynôme donné par le 14.b).

**15.b)** Un élément  $f$  de  $C_I^\infty$  est dans le noyau de  $S$  si et seulement si  $P_f(A) = f(A) = 0$ , i.e. si et seulement si  $P_f$  est un multiple de  $\Pi_A$ , donc si et seulement si  $P_f = 0$  (car  $P_f$  est de degré strictement plus petit que  $\Pi_A$ ). Les éléments du noyau sont donc les  $f$  tels que  $f \equiv 0$ , i.e. les  $f$  qui admettent chaque  $\lambda_i$  pour racine d'ordre au moins  $m_i$ .

**16.a)** Comme  $S$  est un morphisme,  $(\cos A)^2 + (\sin A)^2 = (S(\cos))^2 + (S(\sin))^2 = S(\cos^2 + \sin^2) = S(1) = 1(A) = I_n$ .

**16.b)** En notant  $Id : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ , on a  $(\sqrt{A})^2 = (S(f_1))^2 = S(f_1^2) = S(Id) = X(A) = A$ .

$$x \longmapsto x$$

Enfin,  $\frac{1}{A} = S(f_2)S(Id) = S(f_2 Id) = S(1) = 1(A) = I_n$  donc  $\frac{1}{A} = A^{-1}$ .

**17.**  $\mathcal{M}_A$  est l'image du morphisme d'algèbre  $S$ : c'est donc une sous-algèbre de  $M_n(\mathbb{R})$ . D'autre part,  $C_I^\infty$  étant commutatif,  $\mathcal{M}_A$  l'est également. Comme on l'a vu à la question **11.**, cette algèbre est de dimension  $m$  et la famille  $(Z_{i,j})$  en est une base.

**18.** Si  $B \in \mathcal{M}_A \cap GL_n(\mathbb{R})$ , l'application  $\mathcal{M}_A \longrightarrow \mathcal{M}_A$  est linéaire et injective (car  $B$  est inversible, donc simplifiable).  $\mathcal{M}_A$  étant de dimension finie, cet endomorphisme est également surjectif: comme la matrice identité est élément de  $\mathcal{M}_A$ , il existe  $C \in \mathcal{M}_A$  telle que  $BC = I_n$ , ce qui prouve que  $B^{-1} = C \in \mathcal{M}_A$ .

**19.** Si  $f(A)$  est inversible dans  $M_n(\mathbb{R})$ , son inverse est élément de  $\mathcal{M}_A$  d'après la question précédente. Il existe donc  $g \in C_I^\infty$  tel que  $f(A)g(A) = I_n$ , ce que l'on peut écrire  $S(fg - 1) = 0$ . On en déduit que  $fg - 1$  est dans le noyau de  $S$ , i.e. que  $fg \equiv 1$ . En particulier, on a  $f(\lambda_i)g(\lambda_i) = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$  et les  $f(\lambda_i)$  sont tous non nuls.

Réciproquement, supposons que les  $f(\lambda_i)$  sont tous non nuls. Si  $(a_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 0 \leq k \leq m_j - 1}}$  est une famille quelconque, il existe un et un seul polynôme  $g$  de degré au plus  $m - 1$  tel que :

$$\forall j \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}, g^{(k)}(\lambda_j) = a_{j,k}.$$

Pour avoir  $f(A)g(A) = I_n$ , il faut et il suffit que l'on ait  $fg \equiv 1$ , i.e. que l'on ait :

$$\forall j \in \{1, \dots, r\}, \forall k \in \{0, \dots, m_j - 1\}, (fg)^{(k)}(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour chaque  $j$ , en appliquant la formule de Leibniz, nous obtenons ainsi un système triangulaire d'inconnues  $(a_{j,0}, a_{j,1}, \dots, a_{j,m_j-1})$  dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à  $f(\lambda_j)$ , qui est non nul. Ces systèmes linéaires ont donc une unique solution: il existe un (et un seul) choix des  $(a_{j,k})$  tel que le polynôme  $g$  associé vérifie  $f(A)g(A) = I_n$ , ce qui prouve que  $f(A)$  est inversible (dans  $\mathcal{M}_A$ ).

**20.** On a  $\Lambda_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ . D'autre part, pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \lambda \in \Lambda_{f(A)} &\iff f(A) - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{R}) \\ &\iff (f - \lambda)(A) \notin GL_n(\mathbb{R}) \\ &\iff \exists j \in \{1, \dots, r\}, (f - \lambda)(\lambda_j) = 0 && \text{(d'après 19.)} \\ &\iff \lambda \in \{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_r)\} \end{aligned}$$

donc  $\Lambda_{f(A)} = f(\Lambda_A)$ .

## V - Application à la résolution d'un système différentiel

**21.** On a vu à la question **11.** que  $(Z_{j,k})$  est une base de  $\mathcal{M}_A$ . D'après la question **2.c)**, une suite de matrice

$$M_p = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} x_p(j, k) Z_{j,k}$$

converge vers une matrice

$$M = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} x(j, k) Z_{j,k}$$

si et seulement si  $x_p(j, k)$  converge vers  $x(j, k)$  pour tout couple  $(j, k)$ . On en déduit que

$$f_p(A) = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f_p^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$$

converge vers

$$f(A) = \sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{0 \leq k \leq m_j - 1} f^{(k)}(\lambda_j) Z_{j,k}$$

si et seulement si pour chaque  $(j, k)$ ,  $f_p^{(k)}(\lambda_j)$  converge vers  $f^{(k)}(\lambda_j)$  quand  $p$  tend vers l'infini.

**22.** Pour éliminer la maladresse de l'énoncé qui pourrait conduire à confondre le  $f_p$  du **21.** et le  $f_t$  de la question **22.**, notons simplement  $f : x \mapsto e^{tx}$  et posons :

$$\forall p \in \mathbb{N}, f_p : x \mapsto \sum_{\ell=0}^p \frac{t^\ell}{\ell!} x^\ell.$$

Le cours sur les séries entières nous apprend que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_p^{(k)}(x) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x)$ .

On en déduit en particulier que la suite  $(f_p)$  "converge vers  $f$  sur le spectre de  $A$ ". D'après la question précédente,  $f_p(A)$  converge vers  $f(A)$  quand  $p$  tend vers l'infini, ce qui s'écrit :

$$f(A) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} A^\ell.$$

**23.** On sait que la solution générale du système différentiel est  $A(t) = \exp(tA)X_0$  où  $X_0$  est un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^3$ . D'après la question **13.**, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= f_t(0)Z_{1,0} + f_t'(0)Z_{1,1} + f_t(-1)Z_{2,0} = Z_{1,0} + tZ_{1,1} + e^{-t}Z_{2,0} \\ &= \begin{pmatrix} 1+t & -t & t \\ 1+t-e^{-t} & e^{-t}-t & t \\ 1-e^{-t} & +e^{-t}-1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et la solution générale du système est :

$$\begin{cases} x = a(1+t) - bt + ct \\ y = a(1+t-e^{-t}) + b(e^{-t}-t) + ct \\ z = a(1-e^{-t}) + b(e^{-t}-1) + c \end{cases}$$

avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  réels quelconques.