Concours Communs polytechniques - Session 2015

Corrigé de l'épreuve de mathématiques I
Filière MP

Suites et séries de fonctions, variables aléatoires

Corrigé par M.TARQI [1]

Exercice I

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors on a :

$$\forall t \in [-1,1],\;\; G_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k)t^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda t-\lambda} = e^{\lambda(t-1)}.$$

Nous obtenons alors :

$$\forall t \in]-1,1],\;\; G_X'(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)} \qquad \text{et} \qquad G_X''(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}.$$

Nous en déduisons :

$$\mathbb{E}(X) = G_X'(1) = \lambda e^{\lambda(1-1)} = \lambda,$$

et

$$\mathbb{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \big(G_X'(1)\big)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Exercice II

II.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = 0$, donc f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$. On a

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x - 2\int_0^{+\infty} e^{-2nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - 2\frac{1}{2n} = 0.$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right) = 0.$

II.2. On a $f_n(x) = \left(\dfrac{1}{e^x}\right)^n - 2\left(\dfrac{1}{e^{2x}}\right)^n$ avec $\dfrac{1}{e^x} < 1$ et $\dfrac{1}{e^{2x}} < 1$ pour tout $x \in I$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ (somme de séries géométriques). De plus, pour $x > 0$, $\displaystyle S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}} - 2e^{-2x}\frac{1}{1-e^{-2x}} = \frac{1}{e^x-1} - \frac{2}{e^{2x}-1} = \frac{e^x+1-2}{e^{2x}-1} = \frac{1}{e^x+1}$. Il est clair que S est continue sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 S(x) = 0$, donc S est intégrable sur I.

$$\int_0^{+\infty} S(x)\mathrm{d}x = \lim_{y\to\infty}\int_0^y (1 - \frac{e^x}{e^x+1})\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty}(y - \ln(1+e^y) + \ln 2) = \ln 2.$$

1. M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc. E-mail : medtarqi@yahoo.fr

II.3. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x\right)$ est une série à termes positifs, si elle converge, alors on aura l'égalité contradictoire $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*}f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x\right)=0$ (d'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série), donc nécessairement la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x\right)$ est divergente.

Problème

PARTIE 1. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

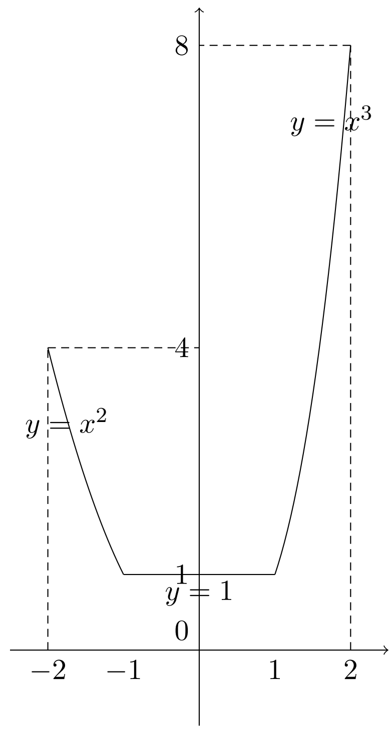
III.1. Supposerons qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers h sur l'intervalle $]0,1]$. Puisque chaque fonction polynôme est continue sur $[0,1]$, alors la limite simple de cette suite définit une fonction continue sur $[0,1]$ et coïncide sur $]0,1]$ avec h, ce qui est absurde. Donc la fonction h ne peut pas être approchée uniformément par une suite de polynômes sur $]0,1]$.

III.2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{P}_N$ qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$. Soient $\varepsilon>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que $\forall n\geq n_0$, $\|f-P_n\|_{,[a,b],\infty}\leq\varepsilon$. Alors, $\forall n\geq n_0$, $\|P_n-P_{n_0}\|_{,[a,b],\infty}\leq 2\varepsilon$. Donc $P_n-P_{n_0}=\alpha_n$ est un polynôme constant. Aussi, $\forall x\in[a,b],\quad f(x)-(P_{n_0}(x)+\alpha_n)$ tend vers0, donc α_n tend vers $f(x)-P_{n_0}(x)$. Donc pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)=P_{n_0}(x)+\lim_{n\to\infty}\alpha_n=P_{n_0}+f(a)-P_{n_0}(a)$. Donc f est un polynôme .
Soit N un entier naturel non nul. D'après ce qui précède $\mathscr{P}_N$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, en conséquence une limite uniforme d'éléments de $\mathscr{P}_N$ est un élément de $\mathscr{P}_N$, c'est-à-dire un polynôme de degré inférieur ou égal à N.

III.3.

III.3.a. On a $N_1(P)=0$ si, et seulement si, $\forall x\in[-2,-1],\quad P(x)=0$ donc P admet une infinité de racines et par conséquent P est le polynôme nul. D'autre part $N(0)=0$.
Si $\lambda\in\mathbb{R}$ et P un polynôme , alors $\forall x\in[-2,-1],\quad |\lambda P(x)=|\lambda||P(x)|$ et donc $N_1(\lambda P)=|\lambda|N_1(P)$.
Soient P et Q deux polynômes et $x\in[-2,-1]$, on a $|(P+Q)(x)|\leq|P(x)|+|Q(x)|$ et donc $N_1(P+Q)\leq N_1(P)+N_1(Q)$.

III.3.b.. Il est clair que la fonction f est continue sur $[-2,2]$, donc d'après le théorème de Weierstrass, f est une limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[-2,2]$.



On a $N_1(P_n - X^2) = \sup\limits_{x\in[-2,-1]} |P_n(x) - x^2| \leq \|P_n - f\|_{[-2,2],\infty}$. Cette inégalité montre que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X^2 dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1. De même on a $N_2(P_n - X^2) = \sup\limits_{x\in[1,2]} |P_n(x) - x^3| \leq \|P_n - f\|_{[-2,2],\infty}$, donc la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X^3 dans $\mathbb{R}[X]$ pour la norme N_2.

PARTIE 2. APPLICATION : UNE THÉORÈME DES MOMENTS

III.4

III.4.a. Posons $P = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$, alors $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^b x^k f(x)\mathrm{d}x = 0$.

III.4.b. Puisque tout polynôme est combinaison linéaire de monômes, on a pour tout polynôme P : $\displaystyle\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$ (la question précédente). D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx = \int_a^b (f(x) - P_n(x))\, f(x) dx \leq (b-a)\|f - P_n\|_{[a,b],\infty}\|f\|_{[a,b],\infty}.$$

Comme la suite $(\|f - P_n\|_{[a,b],\infty})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on déduit $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2 dx = 0$, d'où, puisque f est continue sur $[a,b]$, $f = 0$.

III.5. Application Soit $f \in F^{\perp}$, alors $(f|P) = \displaystyle\int_a^b f(x)P(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout polynôme P, donc, d'après la question précédente, $f = 0$ et donc $F^{\perp} = \{0\}$. On ne peut pas avoir $E = F \oplus F^{\perp} = F$, car il existe des fonctions continues qui ne sont pas des fonctions polynômes .

III.6

III.6.a. Posons $u_n(x) = x^n e^{-(1-i)x}$. Les u_n sont continues sur $[0, +\infty[$ et on a $\forall x \in [0, +\infty[, \quad |u_n(x)| = x^n e^{-x} =_{+\infty} o(x^2)$, donc les u_n sont intégrables sur $[0, +\infty[$. A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-(1-i)x} \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{-x^{n+1}}{1-i} e^{-(1-i)x} \right]_0^{+8} + \frac{n+1}{1-i} \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{n+1}{1-i} I_n. \end{aligned}$$

Comme $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)x} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-i}$, alors $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.

III.6.b. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x \mathrm{d}x = \mathrm{Im} \left(\int_0^{+\infty} x^{4k+3} e^{-(1-i)x} \mathrm{d}x \right) = \mathrm{Im}(I_{4k+3})$. Mais

$$I_{4k+3} = \frac{(4k+3)!}{(1-i)^{4(k+1)}} = \frac{(4k+3)!}{2^{2(k+1)} e^{-(k+1)\pi i}} \in \mathbb{R},$$

donc $\mathrm{Im}(I_{4k+3}) = 0$ et par conséquent

$$\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x \mathrm{d}x = 0.$$

III.6.c Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} u^k e^{u^{\frac{1}{4}}} \sin u^{\frac{1}{4}} \mathrm{d}u = 0$, donc il suffit de prendre $f : u \mapsto e^{u^{\frac{1}{4}}} \sin u^{\frac{1}{4}}$, définie sur $[0, +\infty[$.

III.6.d Si c'est le cas on aura, en suivant le même raisonement de la question **III.4.b**, $f = 0$ sur $[0, +\infty[$ ce qui est absurde.

PARTIE 3. EXEMPLE VIA UN THÉORÈME DE DINI

III.7 Question préliminaire
Soit $x \in [0, 1]$ fixé. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrons que $u_{n+1} \geq u_n$ et que $u_n \leq \sqrt{x}$. En effet, le résultat est vrai pour $n = 0$. Soit $n \geq 1$, et supposons le résultat vrai au rang n. Montrons qu'il est vrai au rang $n + 1$. On a $u_n^2 \leq x$ et

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(x - u_n^2) \geq u_n.$$

De plus,

$$u_{n+1} - \sqrt{x} = (u_n - \sqrt{x})(1 - \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{x}))$$

Le premier facteur du membre de droite de cette inégalité est négatif ou nul. Le second terme est au moins $1 - \sqrt{x}$, qui est positif sur $[0, 1]$. Donc $u_{n+1} \leq \sqrt{x}$.
Pour tout $x \in [0, 1]$, la suite croissante majorée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $[0, \sqrt{x}]$ converge vers $L(x) \geq 0$, qui vérifie par passage à la limite $L(x) = L(x) + \frac{1}{2}(x - L(x)^2)$. D 'où $L(x) = \sqrt{x}$.

III.8. Si $[a, b] = [1, 0]$ et pour $n > 1$, on considère

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ -(n+1)x + \dfrac{2(n+1)}{n} & \text{si } \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

La suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. Mais la convergence n'est pas uniformément puisque : $\|f_n\|_{[0,1],\infty} = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

III.9 Application

III.9.a. D'après ce qui précède la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

III.9.b Toujours d'après ce qui précède, $P_n(x) \leq P_{n+1}(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, donc d'après le théorème de Dini, la convergence simple de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est en fait uniforme sur $[0,1]$.

Partie 4. Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

III.10

III.10.a S_n est une variable aléatoire réelle de loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$. Alors $P(S_n = k) = \complement_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$, $E(S_n) = nx$ et $Var(S_n) = nx(1-x)$. La variable aléatoire $T_n = \frac{S_n}{n}$ vérifie donc $E(T_n) = x$, $Var(T_n) = \frac{x(1-x)}{n}$, et donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a :

$$(\forall\alpha > 0) P(|T_n - x| > \alpha) \leq \frac{Var(T_n)}{\alpha^2} = \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}.$$

L'étude de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$, montre que $\forall x \in [0,1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Finalement :

$$P(|S_n - nx| > n\alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

III.10.b D'après le théorème du transfert, on a :

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p(S_n = k) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \complement_n^k x^k(1-x)^{n-k} = B_n(f)(x).$$

III.11.

III.11.a. f etant uniforément continue sur [0 , 1] (Théorème de Heine). Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$(\forall a \in [0,1])\ (\forall b \in [0,1])\ |a-b| \leq \alpha \text{ entraîne } |f(a) - f(b)| \leq \alpha.$$

Donc $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ vérifiant $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \alpha$.

III.11.b On a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k)\right| &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} \left(\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + |f(x)|\right) P(S_n = k) \\
&\leq 2\|f\|_\infty \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha} P(S_n = k) \\
&= 2\|f\|_\infty \sum_{|T_n - E(T_n)|>\alpha} P\left(T_n = \frac{k}{n}\right) \\
&= 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).
\end{aligned}$$

III.11.c

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x)-f(x)| &= \sum_{|\frac{k}{n}-x|\leq\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)+\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P(S_n=k)\\
&\leq \varepsilon\sum_{|\frac{k}{n}-x|\leq\alpha}P(S_n=k)+2\|f\|_\infty P(|S_n-nx|>n\alpha)\\
&\leq \varepsilon\sum_{0\leq k\leq n}P(S_n=k)+2\|f\|_\infty\frac{1}{4n\alpha^2}\\
&\leq \varepsilon+2\|f\|_\infty\frac{1}{4n\alpha^2}
\end{aligned}$$

Mais il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$ et tout réel $x\in[0,1]$, $2\|f\|_\infty\dfrac{1}{4n\alpha^2}\leq\varepsilon$ et donc

$$\forall n\geq n_0, \forall x\in[0,1],\ \ |B_n(f)(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon.$$

En conclusion, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geq n_0$, $\|B_n(f)-f\|_\infty\leq 2\varepsilon$. Ceci montre que la suite des fonctions polynomes $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement vers f sur $[0,1]$.

•••••••••••••