

Correction CCP maths 1 MP

Avertissement : Il subsiste certainement quelques coquilles...

Exercice 1 : une intégrale double

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$

Il est alors connu que $dx dy = r dr d\theta$.

Le nouveau domaine d'intégration est $[0, 1] \times [0, 2\pi]$.

Ainsi, $I = \int \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} \frac{r}{1+r^2} dr d\theta$.

On applique le théorème de Fubini :

$$I = 2\pi \times \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = 2\pi \frac{1}{2} [\ln(1+r^2)]_0^1 = \pi \ln(2)$$

Exercice 2 : équation différentielle

1. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation (E) se réécrit sous forme résolue $y'' + \frac{a(x)}{x^2}y' + \frac{b(x)}{x^2}y = 0$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{a(x)}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{b(x)}{x^2}$ sont continues sur I et l'équation est linéaire homogène d'ordre 2.

Donc par théorème, S^+ est de dimension 2 et de même, S^- est de dimension 2.

2. Soit $f \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors f est nulle sur les intervalles I et J donc sur \mathbb{R}^* .

Par continuité de f en 0, $f(0) = 0$.

Donc $f = 0$ ce qui montre que $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

φ étant une application linéaire injective, elle définit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(\varphi)$.

Or $\text{Im}(\varphi)$ est un sev de $S_1 \times S_2$ qui est un ev de dimension $2 + 2 = 4$.

Donc $\text{Im}(\varphi)$ est un ev de dimension finie et $\dim(\text{Im}(\varphi)) \leq 4$.

Etant isomorphe à $\text{Im}(\varphi)$, S est aussi de même dimension finie ce qui donne $\dim(S) \leq 4$.

3. • Soit $I_0 \in \{I, J\}$ (l'un des deux intervalles...)

Sur I_0 , l'équation est équivalente à $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$ soit au système $\begin{cases} z' + (1/x) \times z = 0 \\ y' = z \end{cases}$

- La première équation, linéaire, homogène, d'ordre 1 a immédiatement pour ensemble solution sur l'intervalle I_0 la droite vectorielle

$$\{x \mapsto \frac{K}{x}, K \in \mathbb{R}\}.$$

- Ainsi, y est solution de (E) ssi $\exists K \in \mathbb{R}, y' = \frac{K}{x}$ ssi $\exists(K, L) \in \mathbb{R}^2, y = K \ln(|x|) + L$.

- Conclusion : sur l'intervalle I ou l'intervalle J , l'ensemble solution est $\text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto \ln(|x|))$

- Soit $f \in S$. Alors il existe $(k_1, k_2, k_3, k_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = k_1 \ln(x) + k_2 \\ \forall x < 0, f(x) = k_3 \ln(|x|) + k_4 \end{cases}$

f étant continue en 0 donc bornée au voisinage de 0, on obtient $k_1 = k_3 = 0$.

La continuité à gauche et à droite en 0 impose alors $k_2 = f(0) = k_4$.

Donc f est une fonction constante.

- Réciproquement, il est immédiat de vérifier que les fonctions constantes sont éléments de f .

Conclusion : $S = \text{Vect}(x \mapsto 1)$ et $\dim(S) = 1$.

4. • Notons f_α la fonction définie sur I par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Alors f_α est solution de (E) ssi $\forall x > 0, x^2 \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} - 6x\alpha x^{\alpha-1} + 12x^\alpha = 0$ ssi $\forall x > 0, x^\alpha \times (\alpha^2 - 7\alpha + 12) = 0$

4 et 3 sont solutions de l'équation $\alpha^2 - 7\alpha + 12$ donc les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sont éléments de S^+ .

- La famille $(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$ est une 2-liste libre (vérification immédiate) d'éléments de S^+ et S^+ est de dimension 2.

Donc c'est une base de S^+ et $S^+ = \text{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$.

- On vérifie immédiatement par le calcul que $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ définissent deux fonctions sur J solutions de (E). Elles forment également une 2-liste libre et $\dim(S^-) = 2$.

Donc $S^- = \text{Vect}(x \mapsto x^3, x \mapsto x^4)$.

- On vérifie que $S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} k_1 x^3 + k_2 x^4 & \text{si } x \geq 0 \\ k_3 x^3 + k_4 x^4 & \text{si } x < 0 \end{cases}, (k_1, \dots, k_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$.

Soit $f \in S$. D'après ce qui précède, pour vérifier que S appartient à l'ensemble proposé, il suffit de vérifier que $f(0) = 0$...

On sait qu'il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, f(x) = k_1x^3 + k_2x^4$. La continuité de f en 0 donc à droite en 0 donne immédiatement $f(0) = \lim_0 k_1x^3 + k_2x^4 = 0$.

Soit f dans l'ensemble proposé.

Alors il existe $k_1, \dots, k_4 \in \mathbb{R}$ vérifiant ce qu'il faut...

On vérifie que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} :

Soit $\alpha > 0$. Au voisinage de α , f coïncide avec la fonction $x \mapsto k_1x^3 + k_2x^4$. Donc f est deux fois dérivable en α , $f'(\alpha) = 3k_1x^2 + 4k_2x^3$ et $f''(\alpha) = 6k_1x + 12k_2x^2$.

De même, pour $\alpha < 0$, f coïncide au voisinage de α avec $x \mapsto k_3x^3 + k_4x^4$ donc f est deux fois dérivable en α et $f'(\alpha) = 3k_3x^2 + 4k_4x^3$, $f''(\alpha) = 6k_3x + 12k_4x^2$.

Ainsi, f est deux fois dérivable sur \mathbb{R}^* et sa dérivée seconde f'' est clairement continue en tout point de \mathbb{R}^* .

Donc f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^* .

De plus, f est clairement continue à droite et à gauche en 0 donc continue en 0 ainsi qu'en tout point de \mathbb{R}^* .

Donc f est continue sur \mathbb{R} , de classe C^2 sur \mathbb{R}^* .

Il ne reste qu'à vérifier que $f'(x)$ et $f''(x)$ admettent une même limite finie en 0 à droite et à gauche pour assurer, d'après le théorème de prolongement de la classe, que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

D'après les expressions précédemment évoquées pour f'' et f' , ces limites existent et sont 0.

Conclusion : f est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

Les expressions déterminées plus haut pour f' et f'' assurent immédiatement que f est solution de (E).

- Conclusion : on a bien l'égalité souhaitée et S est clairement de dimension 4.

- Considérons l'équation (E) : $x^2y'' + 4xy' + 2y$.

Alors $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont deux solutions de (E) (vérification immédiate) sur I et sur J .

Cette famille de fonctions est clairement libre. Donc comme précédemment, S^+ et S^- sont engendrés par ces deux fonctions.

- Soit $f \in S$ une solution de (E) sur \mathbb{R} .

Alors il existe $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0, f(x) = \frac{k_1}{x} + \frac{k_2}{x^2}$ et $\forall x < 0, f(x) = \frac{k_3}{x} + \frac{k_4}{x^2}$.

Alors $\forall x > 0, x^2f(x) - k_1x = k_2$ donc la continuité de f en 0 à droite donne par passage à la limite en 0^+ : $0 = k_2$.

Donc $\forall x > 0, f(x) = \frac{k_1}{x}$ d'où $\forall x > 0, x \times f(x) = k_1$ ce qui, par passage à la limite en 0 donne $0 = k_1$.

De même, la continuité de f à gauche en 0 donne $k_3 = k_4 = 0$.

Donc $f = 0$ ce qui démontre que S est l'espace vectoriel nul.

Problème

Partie 1 : convergence de séries par transfo d'Abel

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{k=1}^n a_k B_{k-1}.$$

Dans la dernière somme, on effectue le changement d'indice $j = k - 1$.

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n a_k B_k - \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} B_j = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n - a_1 B_0 \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k - (a_0 - a_1) B_0 + a_n B_n - a_1 b_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \end{aligned}$$

2. (a) Par théorème, la suite (a_n) étant convergente, la série $\sum_{k \geq 0} a_k - a_{k+1}$ est également convergente (c'est même une CNS).

- (b) Vérifions que la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$.

Le second terme $(a_n B_n)$ tend vers 0 car produit d'une suite convergente vers 0 et d'une suite bornée.

Le premier terme est une somme partielle de la série de TG $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$.

Notons $M > 0$ un majorant de la suite $(|B_n|)$.

Alors $\forall k \in \mathbb{N}, |(a_k - a_{k+1}) B_k| \leq |a_k - a_{k+1}| \times M = (a_k - a_{k+1}) \times M$ car (a_k) est une suite décroissante.

Ainsi, $(a_k - a_{k+1}) B_k$ est dominée par une le TG d'une série absolument convergente.

Donc $(a_k - a_{k+1}) \times B_k$ est lui même le TG d'une série AC ce qui termine la démonstration de cette question.

- (c) • Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$ est une série convergente.

- Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente après avoir justifié que la suite $(B_n) = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \right)$ est une suite bornée.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \{1, 0\}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, |B_n| \leq 1$ ce assure bien le résultat demandé.

3. (a) • On demande de calculer la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. Notons que, par hypothèse, $e^{i\theta} \neq 1$.

• Par théorème, $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta} \frac{e^{in\theta/2} (-2i) \sin(n\theta/2)}{e^{i\theta/2} (-2i) \sin(\theta/2)} = e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$

- (b) • Lorsque $\alpha > 1$, la série de TG $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente donc convergente.
• Lorsque $\alpha \leq 0$, le module du terme général ne tend pas vers 0 donc la série est grossièrement divergente.
• Soit $\alpha \in]0, 1]$.

On va montrer que la série est convergente par application du résultat de la question **2b2**.

Notons tout de même que le fait que la série commence à $n = 1$ à la place de $n = 0$ n'a pas d'incidence.

La suite $(1/n)$ est clairement décroissante et tend vers 0.

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ donc la suite des sommes partielles qui va bien est bornée.

Conclusion : la série est convergente.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $z_n = \frac{e^{inx}}{n^{1/2}}$.

Lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la question précédente assure la convergence de la série de TG z_n et le rappel de l'énoncé assure la convergence de la série de TG $\text{Im}(z_n) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Lorsque $x \in 2\pi\mathbb{Z}, u_n(x) = 0$ ce qui est bien le TG d'une série convergente.

Conclusion : cette série de fonction converge simplement sur \mathbb{R} .

Partie 2 : convergence uniforme de séries

5. (a) • On montre que la suite $(a_n F_n)$ cvu vers la fonction nulle sur A .
 $\forall z \in A, |a_n F_n(z)| \leq |a_n| \times M$ et cette majoration par une suite (indépendante de z) qui tend vers 0 assure que $(a_n F_n)$ cvu vers 0 sur A .
• Notons comme précédemment, que $\forall k \in \mathbb{N}, |a_k - a_{k+1}| = a_k - a_{k+1}$ par décroissance de (a_n) .
Ainsi, $\forall z \in A, |(a_k - a_{k+1}) F_n(z)| \leq (a_k - a_{k+1}) \times M$ et cette majoration par le TG d'une série convergente (car la suite (a_k) est convergente) indépendant de z assure que la série de fonction $\sum_{k \geq 0} (a_k - a_{k+1}) F_k$ converge normalement sur A .

(b) Il est connu qu'une somme de suites de fonctions qui convergent uniformément définit une suite de fonction qui converge uniformément.

Ainsi, $(a_n F_n)$ cvu sur A et $\left(\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) F_k \right)$ cvu sur A (d'après ce qui précède).

Donc la somme converge uniformément sur A et cette somme est la suite $\left(\sum_{k=0}^n a_k f_k \right)$ d'après la tranformation d'Abel.

Ainsi, la série $\sum a_k f_k$ cvu sur A .

6. (a) • On factorise $1 - e^{ix}$ par $e^{ix/2}$ pour obtenir le résultat souhaité.

• La suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et de limite nulle.

Soit $a \in]0, \pi[$.

Soit $x \in [a, 2\pi - a]$. Notons tout de suite que $e^{ix} \neq 1$ car $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| = \left| \text{Im} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n e^{ikx} \right| = \frac{|\sin(nx/2)|}{|\sin(x/2)|} \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} = \frac{1}{\sin(|x|/2)}$.

Or $x \in [a, 2\pi - a]$ donc $(x/2) \in [a/2, \pi - a/2]$.

Par hypothèse sur $a, 0 < a/2 \leq \pi/2 \leq \pi - a/2 < \pi$ donc les variations de la fonction sin donnent $0 < \sin(a/2) = \sin(\pi - a/2) \leq \sin(x/2) = |\sin(x/2)|$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a, 2\pi - a], \left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| \leq \frac{1}{\sin(a/2)}$ ce qui assure le caractère uniformément borné de la série

de fonctions qui va bien.

Ainsi, d'après les questions précédentes, la série de fonctions $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ converge uniformément sur le segment $[a, 2\pi - a]$.

- Les fonctions étant continues sur \mathbb{R} par les théorèmes généraux, la convergence uniforme assure la continuité de la limite sur le domaine de convergence. Ainsi, U est continue sur tous les segments $[a, 2\pi - a]$ pour $a \in]0, \pi[$.
Donc U est continue sur la réunion de ces segments qui forme l'intervalle $]0, 2\pi[$ tout entier.

- (b) D'après les énoncés précédents, il suffit de démontrer que la suite des sommes partielles $\sum_{k=1}^n \sin(kx) \sin(px)$ est uniformément bornée sur $[0, \pi]$.

$$\text{D'après les calculs précédents, } \forall x \in]0, \pi[, A_n(x) = \left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \sin(px) \right| = \left| \frac{\sin(nx/2) \sin(px)}{\sin(x/2)} \right|.$$

Pour $x \in]0, \pi[$, on a d'après l'énoncé, $0 < \frac{x}{\pi} \leq \sin(x/2)$ ce qui, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ donne $0 < \frac{1}{\sin(x/2)} \leq \frac{\pi}{x}$.

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, \pi[, A_n(x) \leq \frac{|\sin(px)|\pi}{x}.$$

Or, il est bien connu que $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout t réel.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, \pi[, A_n(x) \leq \frac{p|x|\pi}{x} = p\pi.$$

Cette inégalité est encore valable pour $x = 0$ car la somme est nulle.

Ainsi, la somme partielle qui va bien est uniformément bornée. De plus, $(1/\sqrt{n})$ est décroissante de limite nulle donc $\sum_{n \geq 0} v_n(x)$ cvu sur $[0, \pi]$.

- (c) i. • Notons que la fonction U est clairement 2π périodique. Admettons les identités proposées (elles se démontrent par linéarisation des expressions trigo).
• La fonction U est clairement impaire donc $\forall p \in \mathbb{N}, a_p(U) = 0$.
• Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \text{Par imparité, } b_p(U) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(px) U(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(px) \sum_{n=0}^\infty \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(px) \sin(nx)}{\sqrt{n}} \, dx. \end{aligned}$$

La convergence uniforme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(px) \sin(nx)}{\sqrt{n}}$ sur le **segment** $[0, \pi]$ permet une interversion série - intégrale.

$$\text{Ainsi, } b_p(U) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\pi \sin(px) \sin(nx) \, dx = \frac{1}{\sqrt{p}} \text{ d'après le résultat donné par l'énoncé.}$$

- ii. U étant 2π périodique, à valeurs réelles et supposée continue par morceaux sur $[0, \pi]$ donc continue par morceaux sur \mathbb{R} par imparité et 2π périodicité, le théorème de Parseval donne l'égalité $a_0(U)^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^\infty a_p(U)^2 + b_p(U)^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U(t)^2 \, dt$.

L'égalité ci-dessus se réécrit alors $\sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U(t)^2 \, dt \in \mathbb{R}$ ce qui est absurde car la série de TG $\frac{1}{p}$ est divergente.

D'où la contradiction qui montre que U n'est pas continue par morceaux sur $[0, \pi]$.

Partie 3 : convergence uniforme d'une série entière

7. La série entière converge uniformément sur tout disque fermé de centre 0 inclus dans le disque ouvert $D(0, R)$ ie de la forme $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ avec $r \in]0, R[$.

8. (a) Supposons que la série entière $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ cvu sur $] -1, 1[$. Alors on a convergence uniforme sur $[0, 1[$.

D'après le critère de Cauchy uniforme, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, n_0 \leq p \leq q \Rightarrow \forall x \in [0, 1[, \left| \sum_{n=p}^q \frac{x^n}{\sqrt{n}} \right| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$, un tel n_0, p, q vérifiant $n_0 \leq p \leq q$.

Alors $\forall x \in [0, 1[, \left| \sum_{n=p}^q \frac{x^n}{\sqrt{n}} \right| \leq \varepsilon$ ce qui, par passage à la limite quand x tend vers 1^- donne $\left| \sum_{n=p}^q \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \leq \varepsilon$.

On a donc $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, n_0 \leq p \leq q \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^q \frac{1}{\sqrt{n}} \right| \leq \varepsilon$.

Donc la suite $\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ est une suite réelle qui vérifie le critère de Cauchy. Donc elle converge ce qui est absurde car la série de TG $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Conclusion : la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$ donc sur $] -1, 1[$.

(b) D_α est le disque fermé de centre 0 de rayon 1 privé d'une "calotte"...

(c) • L'écriture proposée de D_α ne pose pas de problème. Notons également que dans \mathbb{R}^2 (en dimension finie, donc), toutes normes sont équivalentes...

• Posons $\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \end{cases}$ et $\varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x \end{cases}$.

Par les théorèmes généraux, φ_1 et φ_2 sont clairement continue sur \mathbb{R}^2 .

De plus, les ensembles $] -\infty, 1]$ et $] -\infty, \cos(\alpha)]$ sont deux fermés de \mathbb{R} .

Donc les images réciproques par φ_1 et φ_2 sont des fermés de \mathbb{R}^2 par théorèmes (image réciproque d'un fermé par une application continue...)

Une intersection (quelconque) de fermés est fermée donc $D_\alpha = \varphi_1^{-1}(] -\infty, 1]) \cap \varphi_2^{-1}(] -\infty, \cos(\alpha)])$ est fermé.

• D_α est un fermé d'après ce qui précède et borné (par 1 en norme euclidienne...). En dimension finie, un fermé borné est un compact.

Donc D_α est un compact.

(d) • $1 \notin D_\alpha$ car $\cos(\alpha) < 1$ (par hypothèse sur α ...)

• Soit $z \in D_\alpha$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $z \neq 1$ ce qui permet d'écrire que $|F_n(z)| = \left| 1 \times \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| = \frac{|1 - z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \frac{1 + |z|^{n+1}}{|1 - z|}$
 $\leq \frac{2}{|1 - z|}$

Il reste à minorer le dénominateur par $1 - x$.

On a $|1 - z|^2 = (1 - x)^2 + y^2 \geq (1 - x)^2 > 0$ car $x \leq \cos(\alpha) < 1$.

Donc $|1 - z| \geq |1 - x| = 1 - x \geq 1 - \cos(\alpha) > 0$ (toujours car $x \leq \cos(\alpha) < 1$...)

Par passage à l'inverse, $\frac{1}{|1 - z|} \leq \frac{1}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - \cos(\alpha)}$.

Ainsi, par multiplication par le réel positif 2 : $|F_n(z)| \leq \frac{2}{1 - x} \leq \frac{2}{1 - \cos(\alpha)}$

(e) Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$.

La suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et tend vers 0 donc pour appliquer le résultat de la question **3.5.b.**, il suffit de montrer que la

suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^n z^k \right)$ est uniformément bornée sur D_α .

Ceci est assuré par la majoration précédente car $\frac{2}{1 - \cos(\alpha)}$ est indépendant de z et de n .

Conclusion : la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur D_α .