CCP, 2011, MP, Mathématiques I.

(5 pages)

Exercice 1

1. Soit, pour $n \geqslant 2$, $a_n = \dfrac{2}{n^2-1}$. On a $\forall n \geqslant 2,\ a_n > 0$ et $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{(n+1)^2-1}{n^2-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc, selon la règle de D'Alembert, $\underline{R=1}$.

2. Pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} = b_n - c_n$ et, comme ci-dessus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{b_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{c_n}{c_{n+1}} = 1$ montre que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{x^n}{n+1}$ ont aussi comme rayon de convergence 1. On peut donc écrire, pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\left[\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right]$$

soit $\underline{\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}, S(x) = \dfrac{1-x^2}{x}\ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2} \text{ et } S(0) = 0}$.

3. Pour $x \in]0,1[$, $S(x) = \dfrac{1+x}{x}(1-x)\ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2}$ donc $\underline{\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \frac{3}{2}}$.

Exercice 2

1. Sur $]0,+\infty[$ l'équation homogène associée à (E) : $2xy' - 3y$ a pour solutions les applications $x \mapsto C\exp\left[\frac{3}{2}ln|x|\right] = C\,x^{3/2}$ avec $C \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ étant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Puis la méthode de variation de la constante permet d'écrire les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sous la forme $y(x) = C(x)\,x^{3/2}$ avec C dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0,\ 2x^{5/2}C'(x) = x^{1/2}$ soit $C(x) = -\dfrac{1}{2x} + K$.

Ainsi <u>les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions $x \mapsto -\dfrac{\sqrt{x}}{2} + K\,x^{3/2}$ avec $K \in \mathbb{K}$</u> .

2. Si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$, selon [**1**], il existe $K \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x > 0,\ y'(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{x}} + \dfrac{3K}{2}\sqrt{x}$ et donc $y'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ ce qui interdit à y d'être dérivable en 0.

Donc <u>l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$ est vide</u> .

Problème

Question préliminaire

1. **(a)** $\underline{(i) \Longleftrightarrow (ii)}$.

(b) $\underline{(i) \Longrightarrow (ii)}$.

Partie I

2. **(a)** $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, il suffit donc de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
E contient clairement la fonction nulle donc $E \neq \emptyset$ et si $(f, g, \lambda) \in E \times E \times \mathbb{R}$, pour tout $x > 0$, les deux fonctions $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto g(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto \big(f(t) + \lambda g(t)\big)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi donc $f + \lambda g \in E$. Donc $\underline{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})}$.

(b) $F = C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et si $f \in F$, on a $\forall x > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\quad |f(t)\mathrm{e}^{-xt}| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi donc $f \in E$ et donc $F \subset E$. Donc $\underline{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

(c) Par linéarité de l'intégrale sur $L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, pour tout $(f, g, \lambda) \in E \times E \times \mathbb{R}$,

$$\forall x > 0,\ \mathcal{L}(f+\lambda g)(x) = \int_0^{+\infty} \big(f(t)+\lambda g(t)\big)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + \lambda \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(f)(x) + \lambda\mathcal{L}(g)(x)$$

soit $\mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}(f) + \lambda\mathcal{L}(g)$. Donc $\underline{\mathcal{L} \in \mathcal{L}\left(E, \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})\right)}$.

3. **(a)** $\mathcal{U} \in F$ donc $\mathcal{U} \in E$ et $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty}$ soit $\underline{\forall x > 0,\ \mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \frac{1}{x}}$.

(b) $\diamond$ De même, $h_\lambda \in F$ car $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \big|h_\lambda(t)\big| \leqslant 1$ donc $\underline{h_\lambda \in E}$.

$\diamond$ $\forall x > 0,\ \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+\lambda)t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(\mathcal{U})(x + \lambda)$ donc $\underline{\forall x > 0,\ \mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \dfrac{1}{x + \lambda}}$.

4. $\diamond$ $\dfrac{t^n\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}} = t^n\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\exists\, A > 0,\ \forall t \geqslant A,\ \dfrac{t^n\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}} \leqslant 1$ soit $\underline{\exists\, A > 0,\ \forall t \geqslant A,\ t^n\mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}}$.

$\diamond$ $g_n \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\forall x > 0,\ g_n(t)\mathrm{e}^{-xt} = f(t)t^n\mathrm{e}^{-xt} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(f(t)\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}\right)$ et $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-\frac{xt}{2}}$ est intégrable sur $/R_+$ donc $t \mapsto g_n(t)\mathrm{e}^{-xt}$ l'est aussi. Ainsi $\underline{g_n \in E}$.

5. Déjà, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ donc $f' \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Puisque f est croissante, on a $f' \geqslant 0$ donc $\forall x > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ f'(t)\mathrm{e}^{-xt} \geqslant 0$ et, selon [**1.a**], il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^y f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,dt$ a une limite finie quand y tend vers $+\infty$ pour avoir $f' \in E$. Or, par intégration par parties,

$$\int_0^y f'(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\mathrm{e}^{-xt}\Big] + x\int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = f(y)\mathrm{e}^{-xy} - f(0) + x\int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\ .$$

Or $f \in E$ implique, d'après [**1.a**], $\forall x > 0,\ \int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[y\to+\infty]{} \mathcal{L}(f)(x)$. D'autre part, f étant bornée $\forall x > 0,\ \forall y \geqslant 0\, |f(y)\mathrm{e}^{-xy}| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-xy} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$. La limite du membre de droite existe donc quand y tend vers $+\infty$ ce qui donne $\underline{f' \in E \text{ et } \forall x > 0,\ \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)}$.

6. **(a)** Soit $a > 0$. Appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur $[a, +\infty[$, en posant pour $(x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+,\ \phi(x, t) = f(t)\mathrm{e}^{-xt}$:

- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, l'application $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- Pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+,\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x, t) = -tf(t)\mathrm{e}^{-xt} = -g_1(t)\mathrm{e}^{-xt}$ existe,
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x, t)$ continue sur $[a, +\infty[$,
- Pour tout $x \in [a, +\infty[$, l'application $t \mapsto \dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$,
- $\forall x \in [a, +\infty[,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \left|\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant t\big|f(t)\big|\mathrm{e}^{-at} = \big|g_1(t)\big|\mathrm{e}^{-at}$ et, selon [**4**], $t \mapsto g_1(t)\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable car $g_1 \in E$,

donc $\mathcal{L}(f)$ est C^1 sur $[a, +\infty[$ et $\forall x \in [a, +\infty[,\quad (\mathcal{L}(f))'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t = -\mathcal{L}(g_1)(x)$.

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, $\underline{\mathcal{L}(f) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } (\mathcal{L}(f))' = -\mathcal{L}(g_1)}$.

(b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^n sur $]0, +\infty[$ et $(\mathcal{L}(f))^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n)$:

→ pour $n = 0$, puisque, selon [**a**], $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, à fortiori, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^0 sur $]0, +\infty[$ et l'égalité est immédiate car $g_0 = f$;

→ si le résultat est vrai pour n, en appliquant [**a**] à g_n qui appartient à E d'après [**4**], on obtient que $\mathcal{L}(g_n)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $(\mathcal{L}(g_n))' = -\mathcal{L}(g_{n+1})$, car $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ t\,g_n(t) = g_{n+1}(t)$. On a donc $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^{n+1} sur $]0, +\infty[$ et $(\mathcal{L}(f))^{(n+1)} = (-1)^{n+1}\mathcal{L}(g_n)$.

Ainsi $\underline{\mathcal{L}(f) \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{L}(f))^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n)}$.

Partie II

7. **(a)** $f \in F$ donc $\forall x > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |f(t)\mathrm{e}^{-xt}| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-xt}$ donc

$$\forall x > 0,\ |\mathcal{L}(f)(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{\|f\|_\infty}{x},$$

d'après [**3.a**]. On en déduit que $\underline{\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$.

(b) On retrouve ici les hypothèses de la question [**5**]: f de classe C^1, croissante et bornée. On a donc $\forall x > 0,\ x\mathcal{L}(f)(x) = \mathcal{L}(f')(x) + f(0)$. Mais, de plus, f' est bornée donc $f' \in F$ et donc, suivant [**a**], $\mathcal{L}(f')(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et donc $\underline{x\,\mathcal{L}(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0)}$.

8. **(a)** On a $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \big|f(t)\big| = \big|\ell\big| < \big|\ell\big| + 1$ et donc $\exists\, A \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \geqslant A,\quad \big|f(t)\big| \leqslant \big|\ell\big| + 1$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0, A]$ donc elle y est bornée. On a ainsi $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \big|f(t)\big| \leqslant \operatorname{Max}\left(\operatorname*{Sup}\limits_{u\in[0,A]} \big|f(u)\big|, \big|\ell\big| + 1\right)$. Ainsi $\underline{f \in F}$.

(b) En effectuant le changement de variable $t = \dfrac{u}{a_n}$, on a

$$a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = a_n \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-a_n t}\,\mathrm{d}t = a_n \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{a_n}\right)\mathrm{e}^{-u}\,\frac{1}{a_n}\mathrm{d}u$$

soit $\underline{a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u \text{ avec } \forall u \in \mathbb{R}_+,\ h_n(u) = f\left(\frac{u}{a_n}\right)\mathrm{e}^{-u}}$.

(c) Comme le dit l'énoncé, utilisons le théorème de convergence dominée:

- $\forall n \in \mathbb{N},\ h_n \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R}_+,\quad |h_n(u)| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-u}$ et $u \mapsto \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
- $h_n \xrightarrow{\mathrm{S}} h$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $h(u) = \begin{cases} \ell\,\mathrm{e}^{-u} & \text{si } u > 0 \\ f(0) & \text{si } u = 0 \end{cases}$ car $\frac{u}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $u > 0$,
- h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

On a donc $\int_0^{+\infty} h_n(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u = \ell \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$ ce qui donne, avec le résultat du [**b**], $\underline{\lim_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell}$.

(d) Ceci est vrai pour toute suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ convergeant vers 0 donc la caractérisation séquentielle de la limite permet de conclure que $\lim_{x\to0^+} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$ ce qui donne, si $\ell \neq 0$, $\underline{\mathcal{L}(f)(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\ell}{x}}$.

9. (a) $\diamond$ Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc aussi sur $[x, +\infty[$ pour $x \geqslant 0$, R est définie sur $\mathbb{R}_+$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ R(x) = R(0) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Or, f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et c'est une primitive de f. On a donc $\underline{R \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } R' = -f}$.

$\diamond$ On ne peut pas appliquer directement le résultat de la question [**5**] à R qui n'est pas croissante en général. Cependant, d'une part $R' = -f$ appartient à E car $f \in E$ (hypothèse de la partie), d'autre part, R est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0 \in \mathbb{R}$ donc R appartient à F selon [**8.a**] et la démonstration de l'égalité au [**5**] n'utilise que que le caractère borné de la fonction f et le fait que f et f' soient dans E. Cette démonstration s'applique donc à R et donc $\underline{\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)}$.

(b) $\diamond$ On a déjà indiqué ci-dessus que $\lim_{t\to+\infty} R(t) = 0$ donc $\underline{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R}_+,\quad \forall t \geqslant A,\ |R(t)| \leqslant \varepsilon}$.

$\diamond$ On a donc, pour $x > 0$, selon [**a**],

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| = |x\mathcal{L}(R)(x)| &= x\left|\int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant x\int_0^{+\infty} |R(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \quad \text{car } R \in E \\
&\leqslant x\int_0^{A} |R(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + x\int_A^{+\infty} |R(t)|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant x\int_0^{A} |R(t)|\,\mathrm{d}t + x\int_A^{+\infty} \varepsilon\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \text{car } \mathcal{U} \in E \\
&\leqslant x\int_0^{A} |R(t)|\,\mathrm{d}t + x\int_0^{+\infty} \varepsilon\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

soit $\underline{\forall x > 0,\ |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant x\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}t + \varepsilon}$.

(c) A étant fixé, $x\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$ donc $\exists \eta > 0,\ \forall x \in]0, \eta[,\quad 0 \leqslant x\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$ donc $\forall x \in]0, \eta[,\ |\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leqslant 2\varepsilon$. Donc $\underline{\mathcal{L}(f) \text{ se prolonge en 0 par } \mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$.

Remarque: *Dans le cas où, comme ici, f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}_+$, une simple application du théorème de convergence dominée donne le résultat ci-dessus. La démonstration proposée par l'énoncé a l' intérêt de s'appliquer aussi au cas où f n'est pas intégrable mais d'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ improprement convergente comme l'énoncé lui-même le souligne au* [**10.d**].

Partie III

10. (a) La fonction f ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $\dfrac{\sin t}{t} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1$ et on a, pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \cos(1) - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

car, d'une part, $\left|\frac{\cos x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et, d'autre part, $\dfrac{\cos t}{t^2} = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable sur $[1,+\infty[$.
Donc F admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

(b) Si f était intégrable sur $\mathbb{R}_+$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^{(N+1)\pi} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$. Mais

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{|\sin t|}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

ce qui montre que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge. Ainsi f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(c) ⋄ On peut écrire $\forall t\in\mathbb{R},\ \sin t = \Im m\left(\mathrm{e}^{it}\right)$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^X \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t &= \Im m\left(\int_0^X \mathrm{e}^{(-x+i)t}\,\mathrm{d}t\right) = \Im m\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_0^X\right) = \Im m\left(\frac{\mathrm{e}^{(-x+i)X}-1}{-x+i}\right) \\ &= \Im m\left(\frac{(-x-i)\Big[\big(\cos X + i\sin X\big)\mathrm{e}^{-xX} - 1\Big]}{x^2+1}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne bien $\displaystyle\forall x>0,\ \forall X>0,\quad \int_0^X \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{x^2+1}\Big[\big(\cos X + x\sin X\big)\mathrm{e}^{-xX} - 1\Big]$.

⋄ $\sin\in F$ donc $\sin\in E$ donc pour tout $x>0,\ t\mapsto \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

⋄ En passant à la limite quand X tend vers $+\infty$ dans la formule ci-dessus, on obtient

$$\forall x>0,\quad \int_0^{+\infty} \sin t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2+1}\ .$$

(d) ⋄ f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$ donc , selon [**8.a**], $f\in F$. Donc $f\in E$ et la question [**6.a**] donne $(\mathcal{L}(f))' = -\mathcal{L}(\sin)$ soit, d'après [**c**], $\forall x>0,\ (\mathcal{L}(f))'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$. Ainsi, il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que donc $\forall x>0,\ \mathcal{L}(f)(x) = C - \operatorname{Arctan} x$. Mais, selon la question [**7**], $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ soit $C = \frac{\pi}{2}$. Finalement, $\forall x>0,\ \mathcal{L}(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$.

⋄ Comme on en a fait la remarque à la fin de la question [**9**], l'intégrabilité de f n'est pas nécessaire pour obtenir le résultat du [**9.c**]: il est suffisant que $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t$ existe pour cela. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathcal{L}(f)(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right) = \frac{\pi}{2}$ ce qui donne $\displaystyle \ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

* * *
* *
*