CCP 07 Maths 1, filière MP (4h)

Les calculatrices sont autorisées.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

EXERCICE

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$

a. On pose $F = [0,1] \times [0,1]$, justifier que la fonction f est bornée sur F et y atteint sa borne supérieure. On pose alors M= $\sup\limits_{(x,y)\in F} f(x,y)$

b. Montrer que si la borne supérieure est atteinte en un point de l'ouvert $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ alors nécessairement $M = 3\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

c. Déterminer le maximum de la fonction f sur la frontière de F et le comparer à $3\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ (on pourra utiliser la calculatrice). Déterminer M.

PROBLÈME : ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

Toutes les fonctions de ce problème sont à valeurs réelles.

PARTIE PRÉLIMINAIRE

Les résultats de cette partie seront utilisés plusieurs fois dans le problème.

1. **Fonction Gamma d'Euler**
   (a) Soit $x \in]0,+\infty[$, montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$ est integrable sur $]0,+\infty[$.
   On pose, pour $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$
   (b) Determiner, pour $x \in]0,+\infty[$, une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel non nul n.

2. **Fonction zêta de Riemann**
   On rappelle que la fonction zéta est definie sur $]1,+\infty[$ par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
   On connait $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \dfrac{\pi^4}{90}$, on sait que pour p entier pair, $\zeta(p)$ est de la forme $q\pi^p$ où q est un rationnel ; il a été démontré que certains $\zeta(p)$ pour p entiers impairs sont irrationnels mais on ne sait pas s'ils le sont tous. On se propose de rechercher des valeurs approchées de ces réels $\zeta(p)$.
   (a) On note, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = \zeta(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$ Prouver que, pour n entier naturel non nul et x réel $x > 1$, $R_n(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)n^{x-1}}$
   (b) On fixe l'entier $p \geqslant 2$ et un reel $\varepsilon > 0$. Indiquer une valeur de n pour laquelle on a $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \zeta(p)\right| \leqslant \varepsilon$
   (c) Donner, en utilisant la calculatrice, une valeur approchée de $\zeta(7)$ à 10^{-6} pres.

PREMIÈRE PARTIE : SUITES DE FONCTIONS

Préliminaire : Dans les questions 3 à 5 suivantes, on n'utilisera pas pour les démonstrations le théorème de convergence dominée, énoncé à la question 6.

3. **Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions**
   Démontrer le théorème suivant que l'on notera **TH 1** :
   si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$, alors, la suite de réels $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

On commencera par donner un sens à l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ juste en énonçant un théorème.

4. **Exemples et contre-exemples**
   (a) Déterminer une suite (f_n) de fonctions continues et affines par morceaux sur le segment $[0,1]$ qui converge simplement mais non uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$ et telle que la suite de réels $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ ne converge pas vers le réel $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$
   Remarque : on peut se contenter d'une vision graphique et, dans ce cas, il est inutile d'exprimer $f_n(x)$, mais on attend une justification des deux propriétés demandées
   (b) Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur le segment $[0,1]$, démontrer qu'il est possible que la suite de réels $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ sans que la convergence de la suite de fonctions (f_n) ne soit uniforme sur $[0,1]$.

5. **Cas d'un intervalle quelconque**
   (a) Montrer à l'aide de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies sur $I=[0,+\infty[$ par
$$f_n(x)=\frac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!}$$
   que le **TH 1** n'est pas vrai si on remplace l'intervalle $[a,b]$ par un intervalle I non borné.
   Remarque : on pourra utiliser la formule de Stirling sans la démontrer.
   (b) Nous allons prouver que le **TH 1** est vrai sur un intervalle borné I.
   On considère (f_n) une suite de fonctions continues et intégrables sur I intervalle borné, qui converge uniformément vers une fonction f sur I.
      i. Justifier l'existence d'un entier naturel p tel que, pour tout réel $x\in I$, $|f(x)|\leqslant 1+|f_p(x)|$ et en déduire que f est intégrable sur I.
      ii. Montrer que la suite de réels $\left(\displaystyle\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$. On notera $\ell(I)$ la longueur de l'intervalle I.

6. **Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions**
   On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 2** :
   si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que, pour tout entier naturel n et tout réel $x\in I$: $|f_n(x)|\leqslant\varphi(x)$ alors, la fonction f est intégrable sur I et la suite de réels $\left(\displaystyle\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)$ converge vers le réel $\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$
   (a) Rappeler pourquoi il est inutile de vérifier, lorsqu'on utilise ce **TH 2**, que les fonctions f_n sont intégrables sur I et justifier que f est intégrable sur I.
   (b) Exemples
      i. Montrer à l'aide d'un exemple simple que ce théorème peut être pratique sur un segment I sur lequel la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction f.
      ii. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

DEUXIÈME PARTIE : SÉRIES DE FONCTIONS

7. **Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions**
   Justifier, simplement, à l'aide du **TH 1** le théorème suivant que l'on notera **TH 3** :
   si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$, alors, la série de réels $\sum\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x$$

8. **Application : séries trigonométriques et séries de Fourier**
   On appellera série trigonométrique une série de fonctions du type $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)]$ où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.
   La série de Fourier d'une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ est donc une série trigonométrique.

(a) Montrer qu'une série trigonométrique n'est pas toujours la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Pour cela, utiliser la série de fonctions $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ avec le théorème de Parseval que l'on commencera par énoncer.

(b) Montrer qu'une série trigonométrique qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ est la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
On utilisera sans démonstration les résultats classiques pour n et p entiers naturels : $\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq p \\ \pi \text{ si } n = p \neq 0 \end{cases}$ et $\int_0^{2\pi} \sin(px)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$

9. **Intégration terme à terme d'une série de fonctions**
On rappelle le théorème suivant que l'on notera **TH 4** :
si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I telle que la série $\sum \int_I |f_n(x)|\,\mathrm{d}x$ converge, alors f est intégrable sur I, la série $\sum \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x$$

Application : théorème de Hardy
On suppose que $\sum a_n$ est une série de réels absolument convergente.

(a) Montrer que la série de fonctions $\left(\sum \frac{a_n x^n}{n!} \right)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et exprimer $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ comme la somme d'une série numérique.

10. **Cas où les théorèmes TH 3 et TH 4 ne s'appliquent pas**

(a) Montrer que, la série de fonctions $(\sum (-1)^n x^n)_{n \geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle borné $I = [0, 1[$ (donc les hypothèses du théorème **TH 3** ne sont pas toutes vérifiées).

(b) Montrer que, pour la série de fonctions $(\sum (-1)^n x^n)_{n \geqslant 0}$ sur $I = [0, 1[$, les hypothèses du théorème **TH 4** ne sont pas toutes vérifiées.

(c) Montrer que, néanmoins, $(\sum \int_0^1 (-1)^n x^n\,\mathrm{d}x)_{n \geqslant 0}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n x^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \right) \mathrm{d}x$$

11. **Théorème de convergence monotone**
Soit$\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle I qui converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I.
On suppose que toutes les fonctions f_n sont positives sur I et que la fonction f est intégrable sur I.
On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout $x \in I$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.
Montrer que la suite de fonctions (S_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée **TH 2**, et en déduire que : la série $(\sum \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x)_{n \geqslant 0}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x$

12. **Application à la physique**

(a) Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$

On détaillera toutes les étapes et on pourra remarquer que, pour $t \in]0, +\infty[$, on a $\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}$
Cette intégrale intervient notamment dans la théorie du rayonnement du corps noir.
La loi de Planck donne l'expression de la densité spectrale d'énergie électromagnétique u_λ rayonnée par le corps noir, en fonction de la longueur d'onde par la formule :

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B \lambda T}\right) - 1}$$

où h et k_B sont les constantes de Planck et de Boltzmann, c la célérité de la lumière dans le vide, λ la longueur d'onde et T la température.
Ainsi, la densité volumique totale d'énergie électromagnétique u (rayonnée sur tout le spectre des longueurs d'onde) s'écrit : $u = \displaystyle\int_0^{+\infty} u_\lambda \, \mathrm{d}\lambda$

Si on note M l'exitance totale d'un corps noir on sait que M et u sont liés par la relation $M = \dfrac{c}{4} u$

(b) Démontrer la loi de Stefan : $M = \sigma T^4$ où $\sigma = \dfrac{2\pi^5 (k_B)^4}{15 h^3 c^2}$

13. **Généralisation**

(a) Exprimer de même pour x réel $x > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{\mathrm{e}^t - 1} \, \mathrm{d}t$ en fonction de $\Gamma(x)$ et $\zeta(x)$

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} \, \mathrm{d}t$ et une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{\mathrm{e}^t - 1} \, \mathrm{d}t$