PREMIER EXERCICE

a. $$\iint_T (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{-x}^{1}(x+y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1+x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

b. Quitte à faire un dessin, on voit bien que C est la réunion de deux domaines dont l'intersection est réduite à une droite : T et $T' = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant -1,\ y \geqslant -1,\ x+y \leqslant 0\big\}$; d'où $\iint_C |x+y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_T |x+y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{T'} |x+y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Mais la deuxième de ces intégrales est égale à la première par le changement de variable $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ (dont le jacobien vaut 1). Par conséquent, $\iint_C |x+y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{8}{3}$.

DEUXIÈME EXERCICE

1. Sur chacun des deux intervalles, on a un espace des solutions engendré par $x \mapsto x^n$.

2. Il faut prendre ici la même expression sur chacun des deux intervalles, afin que les pentes à droite et à gauche en 0 soient les mêmes . L'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc de dimension 1.

3. Là, il n'y a plus de contrainte de raccordement puisque les dérivées à droite et à gauche en 0 sont toujours nulles : l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc de dimension 2.

PROBLÈME

I GÉNÉRALITÉS

1.a. Il suffit de considérer $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

1.b. Il suffit de considérer $\displaystyle\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n$

1.c. Il suffit de considérer $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n$

1.d. On sait que si une suite d'applications bornées sur un domaine A converge uniformément sur ce domaine vers une application f, alors f est bornée sur A. Dès lors, n'importe lequel des trois exemples précédents convient : les sommes partielles sont bornées sur $[-1,1]$ (par Heine, puisque ce sont des fonctions polynomiales donc continues) et la somme n'est pas bornée sur $]-1,1[$.

2. C'est du cours ! (on dispose ici de la convergence normale de la série sur [0,1] ...)

3. Pour $x \in]-1,1[$, on peut écrire :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n} = x\ln(1+x) + [\ln(1+x) - x]$$

Comme la question précédente s'applique, on en déduit : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)} = 2\ln 2 - 1$.

II THÉORÈME D'ABEL

4.a. Comme $r_{n+p-1} - r_{n+p} = a_{n+p}$, on a tout simplement : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}(r_{n+p-1} - r_{n+p})\,x^{n+p} = R_n(x)$.

4.b. Il est bien connu *(mais ça n'est pas au programme)* que dans ces histoires, il faut travailler sur les sommes partielles : $\sum_{p=1}^{k}(r_{n+p-1} - r_{n+p})\,x^{n+p} = \sum_{p=1}^{k} r_{n+p-1}\,x^{n+p} - \sum_{p=1}^{k} r_{n+p}\,x^{n+p}$; après mise à l'écart du premier terme de la première somme et réindexation des autres, on obtient : $\sum_{p=1}^{k}(r_{n+p-1} - r_{n+p})\,x^{n+p} = r_n\,x^{n+1} + x^{n+1}(x-1)\sum_{p=1}^{k-1} r_{n+p}\,x^{p-1} - r_{n+k}\,x^{n+k}$; le dernier terme tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini car r_{n+k} tend vers 0 puisque la série $\sum a_n$ converge, et x^{n+k} est borné ; il suffit donc de faire tendre k vers l'infini pour obtenir la relation voulue[1].

4.c. Comme on l'a déjà signalé, r_n tend vers 0 ; par conséquent, si l'on se donne $\varepsilon > 0$, on dispose d'un entier n_0 pour tout $k \geqslant n_0$ on ait $|r_k| \leqslant \varepsilon/2$; alors on a bien $|r_{n+p}| \leqslant \varepsilon/2$ pour $n \geqslant n_0$ et p entier naturel. Et pour $x \in [0,1]$ et $n \geqslant n_0$ on obtient : $|R_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{p=1}^{+\infty} x^{p-1} = \varepsilon$.

4.d. Continuité de la somme à gauche en 1, assurée par convergence uniforme de la série sur $[0,1]$.

5. Par contraposition, la série est divergente.

6. Par primitivation du développement de $\dfrac{1}{1+x^2}$ on obtient $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in]-1,1[$; et l'on peut[2] appliquer le théorème d'Abel pour obtenir : $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

7.a La série proposée converge par critère spécial des séries alternées. Le terme général du produit de Cauchy est ici : $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^n}{\big(k(n-k)\big)^{1/4}} = (-1)^n a_n$. (poser $u_0 = v_0 = 0$)

Or $k(n-k) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$ $\big($étude des variations, ou mieux : $(n-2k)^2 \geqslant 0\big)$ et par conséquent $a_n \geqslant \dfrac{\sqrt{2}(n-1)}{\sqrt{n}}$; ce qui montre que la série de terme général w_n diverge grossièrement.

7.b Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les séries entières $\sum u_n\,x^n$ et $\sum v_n\,x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. D'après le cours, c'est alors aussi le cas de $\sum w_n\,x^n$... Si l'on note $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, les sommes respectives, on a : $U(x)\,V(x) = W(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. Mais d'après le théorème d'Abel[3] appliqué à chacune des trois séries, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, $U(x)$ tend vers $\sum u_n$, $V(x)$ tend vers $\sum v_n$, $W(x)$ tend vers $\sum w_n$. Par unicité de la limite, le produit des deux premières sommes est égale à la troisième.

---

[1]Qui est valable aussi en 1 ...

[2]Ce résultat s'obtient aussi par majoration du reste d'une série alternée vérifiant le critère spécial ...

[3]Bien entendu, cela devient trivial si les deux rayons initiaux sont strictement supérieurs à 1 ...

III RÉCIPROQUE DU THÉORÈME D'ABEL

8. C'est la question 1.b) !

9. Puisque les coefficients sont positifs, $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$; en outre, la fonction f est croissante sur $[0,1[$, d'où $f(x) \leqslant \lim_{x\to 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. On a donc : $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k \leqslant \lim_{x\to 1^-} f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. En faisant tendre x vers 1 dans cette dernière inégalité, on obtient une majoration de la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum a_n$ qui converge donc.

IV SÉRIES HARMONIQUES TRANSFORMÉES

10. D'après le lemme d'Abel du programme officiel, s'il existe $r > 0$ tel que la suite de terme général $|a_n|\, r^n$ soit bornée, alors le rayon de convergence de $\sum a_n\, x^n$ est supérieur ou égal à r. Avec $r = 1$ on voit ainsi que les deux séries considérées ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Au point 1, la première diverge grossièrement et la deuxième ne converge pas absolument ; par conséquent 1 est le rayon de convergence de l'une et de l'autre.

11. Effectivement[4], on peut écrire $f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in]-1,1[$ ... et appliquer le théorème de Littlewood précédemment admis pour la réciproque du théorème d'Abel.

12. On a : $x^p\, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n\, x^{n+p-1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \varepsilon_{k-p}\, x^{k-1} = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \varepsilon_k\, x^{k-1}$; par conséquent, $g(x) = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\, x + \cdots \varepsilon_p\, x^{p-1}}{1 - x^p}$.

13. $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$ diverge quand x tend vers 1 ; tandis que $\displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ tend vers $\ln 2$ ...

14. On est bien mis sur la voie par la question précédente : 1 étant racine simple du dénominateur de $g(x)$, il faut et il suffit que 1 soit racine du numérateur pour que l'intégrale soit convergente. (dans ce cas, g est prolongeable par continuité en 1) Une CNS est donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i = 0$.

Cela ne peut pas se produire lorsque p est impair !

15. On a ici : $g(x) = \dfrac{1 + x + x^2 - x^3 - x^4 - x^5}{1 - x^6} = \dfrac{(1+x+x^2)(1-x^3)}{(1-x^3)(1+x^3)} = \dfrac{1+x}{1+x^3} + \dfrac{x^2}{1+x^3}$;

on en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x + 1} + \int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^3}$. La première intégrale (abélienne) vaut :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 3/4} = 2\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 3/4} = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Pour la seconde, on a une primitive évidente ... Le résultat final est donc : $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \dfrac{3}{\ln 2}$.

[4] Cela aurait du être une question préalable, même si c'est du cours ...