

I. Projection sur un convexe fermé de \mathbb{R}^n .

1. Inégalité de Schwarz et cas d'égalité : cours classique.

Soit (a, b, c) vérifiant les conditions de l'énoncé. Il vient $0 = \|a - b\|^2 - \|a - c\|^2 = 2((c - b)(a - \frac{b+c}{2}))$ d'où la conclusion par Pythagore.

2. Soit y_0 fixé quelconque dans F et soit $K = F \cap \overline{B}(x, R)$ avec $R = \|x - y_0\|$. On a clairement $d(x, F) = d(x, K)$. Or K est compact en tant que fermé borné et l'application $y \mapsto \|x - y\|$ est continue (lipschitzienne de rapport 1) et admet donc un minimum sur K . CQFD. La distance d'un point à un fermé est atteinte.

3. Soit désormais A un convexe fermé et deux points u_1 et u_2 de A en lesquels la distance de x à A est atteinte. Si $u_1 \neq u_2$, il vient d'après 1., $\|x - m\| < \|x - u_1\| = d(x, A)$ avec $m = \frac{u_1 + u_2}{2} \in A$ ce qui est impossible. CQFD. La distance à un convexe fermé est atteinte en un unique point.

4. Soit α vérifiant les conditions de l'énoncé et soit y quelconque de A . Il vient : $\|x - y\|^2 = \|x - \alpha\|^2 + \|y - \alpha\|^2 - 2(x - \alpha|y - \alpha) \geq \|x - \alpha\|^2$ donc $\alpha = P(x)$. CQFD.

5. Supposons qu'il existe $y \in A$ vérifiant les conditions de l'énoncé (ce qui assure $y \neq P(x)$) et soit, pour $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = P(x) + t(y - P(x))$. Il vient $\mathcal{S}(t) = \|x - y(t)\|^2$.

Par ailleurs $\mathcal{S}(t) = \|x - P(x)\|^2 - 2(x - P(x)|y - P(x))t + \|y - P(x)\|^2 t^2$ donc atteint son minimum sur \mathbb{R} en t_0 strictement positif puisque le coefficient de t est strictement négatif par hypothèse.

Donc $\mathcal{S}(t_0) < \mathcal{S}(0) = \|x - P(x)\|^2$. Or $\mathcal{S}(1) = \|x - y\|^2 > \|x - P(x)\|^2$ puisque $y \neq P(x)$ i.e. $\mathcal{S}(1) > \mathcal{S}(0)$.

Ainsi $t_0 \in]0, 1[$ donc $y(t_0) \in A$ et $\|x - y(t_0)\|^2 = \mathcal{S}(t_0) < \mathcal{S}(0) = \|x - P(x)\|^2$ ce qui est contradictoire avec la définition de $P(x)$. En conclusion il n'existe aucun élément y de A tel que $(x - P(x)|y - P(x)) > 0$. CQFD.

6. Simple résumé des deux questions précédente : La projection $P(x)$ de x sur un convexe fermé de \mathbb{R}^n est caractérisée par $(x - P(x)|y - P(x)) \leq 0$ pour tout $y \in A$.

7. En particulier puisque $P(y) \in A$, on a $(x - P(x)|P(y) - P(x)) \leq 0$ donc puisque $x - P(x) = (x - y) + (y - P(x))$: $(x - y|P(x) - P(y)) \geq (P(x) - y|P(x) - P(y)) = \|P(x) - P(y)\|^2 - (y - P(y)|P(x) - P(y))$.

Or $(y - P(y)|P(x) - P(y)) \leq 0$ d'après 6. puisque $P(x) \in A$. Ainsi $\|P(x) - P(y)\|^2 \leq (x - y|P(x) - P(y))$.

Si $P(x) \neq P(y)$ il en découle par l'inégalité de Schwarz que $\|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\|$. Ce qui est encore vrai si $P(x) = P(y)$. Ainsi P est lipschitzienne de rapport 1.

Naturellement $P(x) = x$ si $x \in A$ donc $P(A) = A$ et a fortiori $P(\mathbb{R}^n) = A$.

8. Soit $x \notin A$. Supposons que $P(x) \in \overset{\circ}{A}$ et soit $R > 0$ tel que $B(P(x), R) \in A$. Alors $R \leq \|x - P(x)\|$ car $x \notin A$.

Soit $y_0 = P(x) + \frac{R}{2} \frac{x - P(x)}{\|x - P(x)\|}$. Alors $y_0 \in A$ et en outre $\|x - y_0\| = \left|1 - \frac{R}{2\|x - P(x)\|}\right| \|x - P(x)\|$.

Or $R \leq \|x - P(x)\|$ donc $\left|1 - \frac{R}{2\|x - P(x)\|}\right| = \left(1 - \frac{R}{2\|x - P(x)\|}\right) < 1$. Ainsi $\|x - y_0\| < \|x - P(x)\|$ ce qui est

contradictoire avec la définition de $P(x)$. Si $x \notin A$ alors $P(x) \in A \setminus \overset{\circ}{A}$.

II. Théorème de Brouwer dans \mathbb{R}^2 .

9. Soit x fixé quelconque dans B et soit F_x définie sur \mathbb{R} par $F_x(t) = \|x + t(x - f(x))\|^2 - 1$ i.e.

$F_x(t) = \|x - f(x)\|^2 t^2 + 2(x|x - f(x))t - (1 - \|x\|^2)$. Supposons que f n'admette aucun point fixe, alors $F_x(t)$ est un trinôme du second degré et, comme $1 - \|x\|^2 \geq 0$, ce trinôme admet une unique racine positive ou nulle. D'où l'existence et l'unicité de la fonction ρ . CQFD.

En outre $\rho(x) = \frac{-(x|x - f(x)) + \sqrt{\Delta(x)}}{\|x - f(x)\|^2}$ avec $\Delta(x) = (x|x - f(x))^2 + \|x - f(x)\|^2(1 - \|x\|^2)$ ce qui prouve que ρ

est de classe \mathcal{C}^2 par composition d'applications classiquement \mathcal{C}^2 . Naturellement $\rho(x) = 0$ si et seulement si $x \in S$.

10. Il vient $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \equiv 1$ donc par dérivation (licite puisque φ est \mathcal{C}^2) il vient $\begin{cases} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \equiv 0 \\ \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \equiv 0 \end{cases}$ c'est à dire $tM(x) \cdot \varphi(x) = 0$ pour tout $x \in B$ en notant $M(x)$ la matrice proposée. Donc $\varphi(x) \in \text{Ker } M(x)$. Or $\varphi(x) \neq 0$ puisque $\|\varphi(x)\| = 1$. Donc $M(x)$ est singulière. CQFD.

11. Soit $A(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(x) & \alpha_{21}(x) \\ \alpha_{12}(x) & \alpha_{22}(x) \end{pmatrix}$ la matrice jacobienne de α . Il vient $\psi(x, t) = 1 + t \text{tr}(A(x)) + t^2 \text{Det}(A(x))$ donc $\beta(x) = \text{tr}(A(x))$ et $\gamma(x) = \text{Det}(A(x))$ qui sont de classe \mathcal{C}^1 puisque α est de classe \mathcal{C}^2 . CQFD.

En outre $\varphi(x) = x + \alpha(x)$ donc $M(x) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_{11}(x) & \alpha_{21}(x) \\ \alpha_{12}(x) & 1 + \alpha_{22}(x) \end{pmatrix}$ et, d'après **10.**, $\psi(x, 1) = 0$. CQFD.

b. Pour t fixé, $x \mapsto \psi(x, t)$ est continue sur B d'après **a.** donc J est bien définie. Il vient $J(0) = \iint_B dx_1 dx_2 = \pi$ et $J(1) = 0$ d'après **a.**

c. Il vient $\iint_B \beta(x) dx_1 dx_2 = \iint_b \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$. Par Fubini (licite car les fonctions sont continue sur B) :

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 &= \int_{x_2=-1}^{x_2=1} \left(\int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1-x_2^2}} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{x_2=-1}^{x_2=1} \left(\alpha_1(\sqrt{1-x_2^2}, x_2) - \alpha_1(-\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \right) dx_2. \end{aligned}$$

Or, pour tout $x_2 \in [-1, 1]$, $y = (-\sqrt{1-x_2^2}, x_2)$ et $z = (\sqrt{1-x_2^2}, x_2)$ appartiennent à S donc $\rho(y) = \rho(z) = 0$ donc $\alpha(y) = \alpha(z) = 0$ donc a fortiori $\alpha_1(y) = \alpha_1(z) = 0$.

Ainsi $\iint_B \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = 0$ et de même $\iint_B \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = 0$. Donc finalement $\iint_B \beta(x) dx_1 dx_2 = 0$. CQFD.

d. Par Fubini comme ci-dessus, $I_1(g) = \int_{x_2=-1}^{x_2=1} \left(\int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1-x_2^2}} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_2}{\partial x_2} dx_1 \right) dx_2$.

L'intégrale interne se calcule par parties (licite car g est de classe \mathcal{C}^2) et vaut ainsi :

$$g_1(\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\sqrt{1-x_2^2}, x_2) - g_1(-\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(-\sqrt{1-x_2^2}, x_2) - \int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1-x_2^2}} g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) dx_1.$$

En réutilisant Fubini en sens inverse pour la fonction $x \mapsto g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x)$ (qui est bien continue sur B puisque g est \mathcal{C}^2), on obtient la valeur cherchée pour $I_1(g)$. CQFD.

En notant que $\iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = I_1(\alpha) - I_2(\alpha)$ compte-tenu de la valeur de $\gamma(x)$ (Cf **a.**) et du fait que α est

bien de classe \mathcal{C}^2 (Cf **9.**), il en découle puisque en outre $\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_2 \partial x_1}$ d'après le théorème de Schwarz du fait

que α est bien \mathcal{C}^2 , que $\iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = 0$. CQFD.

Il découle immédiatement de ce qui précède (nullité des 2 intégrales doubles, expression de $\psi(x, t)$ et définition de $J(t)$) que J est constante ce qui est contradictoire avec $J(0) = \pi$ et $J(1) = 0$. La contradiction porte sur la seule hypothèse faite à savoir f n'admet pas de point fixe, hypothèse qui nous a permis de définir la fonction ρ .

Le théorème de Brouwer pour une application \mathcal{C}^2 de B dans B est établi.

12. Résulte immédiatement de la généralisation du théorème de Weierstrass et de l'équivalence des normes dans \mathbb{R}^2 .

13. Pour φ continue sur B , on pose dans la suite $N_\infty(\varphi) = \sup_{x \in B} \|\varphi(x)\|$.

Pour $x \in B$ il vient $\|h_\varepsilon(x)\| = \frac{1}{1+\varepsilon} \|f_\varepsilon(x)\| \leq \frac{1}{1+\varepsilon} (\|f(x)\| + \|f(x) - f_\varepsilon(x)\|) \leq \frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon} = 1$. Donc $h_\varepsilon(B) \subset B$.

En outre $\|f(x) - h_\varepsilon(x)\| = \frac{\|(1+\varepsilon)f(x) - f_\varepsilon(x)\|}{1+\varepsilon} \leq \|(1+\varepsilon)f(x) - f_\varepsilon(x)\| \leq \|f(x) - f_\varepsilon(x)\| + \varepsilon \|f(x)\| \leq 2\varepsilon$.

L'espace des applications de classe \mathcal{C}^2 de B dans B est dense dans celui des applications continues de B dans B pour la norme uniforme.

14. Classiquement en remplaçant ε par $\frac{1}{n}$, on construit une suite (h_n) d'applications \mathcal{C}^2 de B dans B convergeant uniformément sur B vers f .

D'après le théorème de Brouwer particulier, chaque fonction h_n admet un point fixe x_n . Comme B est compact, la suite (x_n) admet une suite extraite (y_n) avec $y_n = x_{\varphi(n)}$ convergeant vers $\omega \in B$.

Comme f est continue sur B donc en ω , la suite $(f(y_n))$ tend vers $f(\omega)$ et par ailleurs $h_{\varphi(n)}(y_n) = y_n$ tend vers ω .

Or $\|f(y_n) - h_{\varphi(n)}(y_n)\| \leq N_\infty(f - h_{\varphi(n)})$ tend vers 0 car la suite $(h_{\varphi(n)})$ converge uniformément vers f en tant que suite extraite de la suite (h_n) qui converge uniformément vers f . Ainsi $f(\omega) = \omega$. CQFD.

Toute application continue de B dans B admet un point fixe.

15. Il suffit de remarquer que g est une application continue de B dans B .

16. A étant compact en tant que fermé borné, $f(A)$ est compact donc borné ainsi que $A \cup f(A)$ en tant qu'union de deux bornés. D'où l'existence de r . CQFD.

h est une application de $\overline{B}(O, r)$ dans A donc a fortiori dans $\overline{B}(O, r)$. En outre elle est continue puisque f et P le sont (Cf 7.). D'après la question précédente, h admet un point fixe $\omega \in \overline{B}(O, r) : f(P(\omega)) = \omega$.

Pour conclure, il suffit de prouver que $\omega \in A$ car alors $P(\omega) = \omega$.

Supposons le contraire. Alors $P(\omega) \in A \setminus \overset{\circ}{A}$ d'après 8.. Mais alors $f(P(\omega)) \in A$ puisque $f(A \setminus \overset{\circ}{A}) \subset A$. Or $f(P(\omega)) = \omega$. Donc $\omega \in A$. Contradiction. CQFD.

Le théorème de Brouwer général dans \mathbb{R}^2 est ainsi établi.

III. Quelques conséquence du théorème de Brouwer.

17. Supposons $g = -f$ continue. Alors g est une application continue de B dans S donc dans B et admet, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe ω qui appartient à S puisque g est à valeurs dans S . Ainsi $f(\omega) = -\omega$. Mais comme $f(x) = x$ sur S , il vient que $f(\omega) = \omega$. Donc $\omega = 0$ ce qui est impossible puisque $\omega \in S$. CQFD.

Le théorème de non rétraction continue est établi :

Il n'existe aucune application continue de B dans S qui fixe les points de S .

18. Comme $y \notin f(B)$, g est bien définie et est une application continue de B dans S et admet donc, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe ω qui appartient à S comme précédemment.

Donc $g(\omega) = \frac{y - \omega}{\|y - \omega\|}$ car $f(\omega) = \omega$ puisque $\omega \in S$. Ainsi $\frac{y - \omega}{\|y - \omega\|} = \omega$ avec $\omega \in S$.

Supposons désormais que $y \in B$. Notons déjà que $y \notin S$ car $S \subset f(B)$. Ainsi $\|y\| < 1$.

Or $y - \omega = \|y - \omega\|\omega$ donc $(y - \omega|\omega) \geq 0$ soit $(y|\omega) \geq \|\omega\|^2 = 1$.

Mais par ailleurs $|(y|\omega)| \leq \|y\|\|\omega\| = \|y\| < 1$. Contradiction CQFD.

Si f est continue sur B et fixe les points de S alors $B \subset f(B)$.

19. Seule la continuité de f en 0 n'est pas évidente. Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque. Comme h est continue sur le compact $S \times [0, 1]$, elle y est uniformément continue. Donc il existe $\alpha > 0$ tel que si x_1 et x_2 sont deux éléments de S tels que $\|x_1 - x_2\| \leq \alpha$ et t_1 et t_2 deux éléments de $[0, 1]$ tels que $|t_1 - t_2| \leq \alpha$ alors $\|h(x_1, t_1) - h(x_2, t_2)\| \leq \varepsilon$.

Soit alors $x \in B \setminus \{0\}$ tel que $\|x\| \leq \alpha$. Il vient $\|h(\frac{x}{\|x\|}, 1 - \|x\|) - h(\frac{x}{\|x\|}, 1)\| \leq \varepsilon$ c'est à dire encore $\|f(x) - f(0)\| \leq \varepsilon$.

Ainsi f est bien continue en 0 donc est une application continue de B dans S fixant les points de S ce qui contredit le théorème de non rétraction continue. CQFD.

S n'est pas continuellement rétractile.

20. Comme $y \notin f(\overline{B}(O, r))$, g_r est définie et continue sur $\overline{B}(O, r)$ à valeurs dans $S(O, r)$ donc admet, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe $u_r \in S(O, r)$. L'égalité $g_r(u_r) = u_r$ s'écrit $r(y - f(u_r)) = \|y - f(u_r)\|u_r$.

En multipliant scalairement cette égalité par u_r on obtient l'égalité cherchée puisque $\|u_r\| = r^2$. CQFD.

Supposons qu'il existe y non atteint par f . Alors $y \notin f(\overline{B}(O, r))$ et donc il existe un tel u_r pour tout $r > 0$.

Or par hypothèse (non encore utilisée) $(f(u_r)|u_r) \geq 0$.

Ainsi pour tout $r > 0$, il existe $u_r \in S(O, r)$ tel que $(y|u_r) \geq r\|y - f(u_r)\|$.

Or $|(y|u_r)| \leq \|y\|\|u_r\| = r\|y\|$ donc $\|y - f(u_r)\| \leq \|y\|$ pour tout $r > 0$ donc $\{f(u_r)\}_{r>0}$ est borné.

Par ailleurs comme $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$ et comme $\|u_r\| = r$, il vient que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \|f(u_r)\| = +\infty$. contradiction.

Si f est une application continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 telle que $(f(x)|x) \geq 0$ pour tout x et $\|f(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

alors f est surjective.

————— FIN —————