ENSI-MP

Mathématiques 1

François Saint Pierre

I. convergence uniforme dans $C([0,1],\mathbf{R})$

1. Pour tout x de $[0,1]$ $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est une une suite de cauchy donc convergente car $\mathbf{R}$ est complet. $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a donc une limite simple.

2. Soit $\varepsilon > 0$ pour $n \geq N(\varepsilon)$ et $p \geq N(\varepsilon)$ on a $|f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$ pour tout x de $[0,1]$. par continuité de $||$ on obtient par passage à la limite pour p : $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
Donc $|f(x)| \leq \varepsilon.+f_n(x) \leq \varepsilon.+N_\infty(f_n)$. $N_\infty(f_n)$ existe car f_n est continue sur le compact $[0,1]$.
$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ justifie $N_\infty(f_n - f) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

3. Une limite uniforme d'application continues est continue donc $f \in C([0,1],\mathbf{R})$.
Toute suite de cauchy dans $(C([0,1],\mathbf{R}), N_\infty)$ est convergente donc c'est un espace de Banach.

4. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers u

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & 1 \quad x \in [0,1[\\ u(1) & = & e \end{array}$$

u n'est pas continue donc $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne peut être de Cauchy (cf 3).

5. $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers$\int_0^x 1dt$. (la valeur en 1 ne modifie pas l'intégrale).
$N_\infty\left(\int_0^x (e^{t^n}-1)dt\right)$. tend vers 0 avec n donc on a la convergence uniforme.
(On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que l'on a une suite de Cauchy en utilisant la convergence simple vers u .)

II. Théorème du point fixe de Banach.

1. $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \leq \alpha \|x - y\|$. Donc $(1-\alpha)\|x - y\| \leq 0$ avec $1 - \alpha > 0$. donc $\|x - y\| = 0$ et $x = y$.

2.1 Dans tous les livres....

2.2 $\alpha \in [0,1[$ on obtient donc une série géométrique convergente:
$\|a_{n+p} - a_n\| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|a_1 - a_0\|$ qui prouve que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy donc convergente vers l dans E (Banach) et l est dans $\overline{A}$.

De plus A est fermé $\overline{A} = A$ donc la limite est dans A.

2.3 T continue donc, $T(a_n) \to T(l), T(a_n) = a_{n+1} \quad (a_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est une sous suite de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donc converge aussi vers l. On a donc en passant à la limite: $T(l) = l$. Cette limite est unique d'après 2.1.

3.1 $U = I + T$ est continue comme somme de fonctions continues (T est lipchitzienne).

Soit $y \in E \;\; U(x) = y$ ssi $x = y - T(x)$. Or T_y définie par $T_y(x) = y - T(x)$ est contractante car $\|T_y(x) - T_y(z)\| = \|T(z) - T(x)\| \leq \|x - z\|$ donc d'après II;2 T_y possède un point fixe unique donc U est bijective. (remarque directement l'injectivité est triviale mais pas la surjectivité.....).

3.2 On pose $\left(U^{-1}(x), U^{-1}(y)\right) = (a, b)$, $a + T(a) = x \;\; b + T(b) = y$.

$x - y = a - b - (T(b) - T(a))$ donc $\|x - y\| = \|a - b - (T(b) - T(a))\| \geq |\|a - b\| - \|T(a) - T(b)\||$

Or $\|T(a) - T(b)\| \leq \alpha \|a - b\|$ comme $\alpha \in [0, 1[$

$\|x - y\| \geq \|a - b\| - \|T(a) - T(b)\| \geq (1 - \alpha)\|a - b\|$

Donc $\left\|U^{-1}(x) - U^{-1}(y)\right\| \leq (1 - \alpha)^{-1}\|x - y\|$

4.1 $\|V(x - y)\| = \|V(x) - V(y)\| \leq \|V\| . \|x - y\|$ Par linéarité de V et par propriété des normes subordonnées.Donc comme $\|V\| \in [0, 1[$, V est contractante.

4.2 $y = (I + V_n)(x_n) = (I + V)(x)$ donc $x_n - x = V(x) - V_n(x_n) = V(x) - V_n(x) + V_n(x - x_n)$.

On a donc $(I + V_n)(x_n - x) = (V - V_n)(x)$ et $(x_n - x) = (I + V_n)^{-1}(V - V_n)(x)$.

$\|x_n - x\| = \left\|(I + V_n)^{-1}(V - V_n)(x)\right\| \leq (I - \|V_n\|)^{-1}\|V - V_n\| \|x\|$. (II.3.2 II.4.1)

Comme $\|V - V_n\| \to 0$ et $(I - \|n\|)^{-1}$ est borné ($(I - \|V_n\|)^{-1} \to (I - \|V\|)^{-1}$ et $\|V_n\| < 1$).

Bilan $\|x_n - x\| \to 0$ et $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$.

III. Etude d'une transformation de l'ensemble $C([0,1], \mathbf{R})$.

1. découle directement du théorème des accroissements finis.

2.1$y \to (x, y, u(y))$ est continue car ses composantes le sont et φ est continue donc l'application composée est continue.

2.2 $y \to \varphi(x, y, u(y))$ est continue sur $[0, 1]$ ce qui permet de définir T_φ

$(x, y) \to \varphi(x, y, u(y))$ est aussi continue sur $[0, 1]^2$ (même démarche qu'au 2.1) on peut donc utiliser le théorème de continuité sous le signe $\int$.

2.3 Pour $(u_1, u_2) \in (C([0, 1], \mathbf{R}))^2$ et pour tout $x \in [0, 1]$:

$|(T_\varphi(u_1))(x) - (T_\varphi(u_2))(x)| = \left|\int_0^1 (\varphi(x,y,u_1(y)) - \varphi(x,y,u_2(y)))\,dy\right|$
$|T_\varphi(u_1) - (T_\varphi(u_2))(x)| \leq \int_0^1 |(\varphi(x,y,u_1(y)) - \varphi(x,y,u_2(y)))|\,dy \leq \int_0^1 r\,|u_1(y) - u_2(y)|\,dy$
Donc pour tout x $|(T_\varphi(u_1) - (T_\varphi(u_2))(x)| \leq \int_0^1 rN_\infty(u_1 - u_2)\,dy = rN_\infty(u_1 - u_2)$
D'où pour tout $(u_1, u_2) \in (C([0,1], \mathbf{R}))^2 :\ N_\infty(T_\varphi(u_1) - T_\varphi(u_2)) \leq rN_\infty(u_1 - u_2)$

2.4 D'après 2.3 pour $\lambda \in \mathbf{R}$ $N_\infty(\lambda T_\varphi(u_1) - \lambda T_\varphi(u_2)) = |\lambda|\,N_\infty(T_\varphi(u_1) - T_\varphi(u_2)) \leq |\lambda|\,N_\infty(u_1 - u_2)$

Pour $\lambda \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$ on a $|\lambda|\,r < 1$ et λT_φ est une contraction du Banach $(C([0,1], \mathbf{R}), N_\infty)$. donc d'après II.3 $S_{(\varphi,\lambda)}$ est un homéomorphisme de $(C([0,1], \mathbf{R}), N_\infty)$ dans lui même.

3.1 $(x,y,z) \to \mu(x,y)z$ est continue. Sur le compact $[0,1]^2$ μ est continue donc on peut poser $r = N_\infty(\mu)$. On a $|\varphi(x,y,z) - \varphi(x,y,z')| = |\mu(x,y)|\,|z - z'| \leq r\,|z - z'|$ μ est donc de type U.

La linéarité de $\int$ justifie celle de T_φ donc d'après 2.4 pour $\lambda \in \left]-\frac{1}{N_\infty(\mu)}, \frac{1}{N_\infty(\mu)}\right[$ on a $S_{(\varphi,\lambda)}$ est un isomorphisme de $(C([0,1], \mathbf{R}), N_\infty)$ dans lui même.

3.2 Soit $u \in C([0,1], \mathbf{R})$ telle que $N_\infty(u) \leq 1$. Pour $x \in [0,1]$:
$\left|(T_{\varphi_n}(u) - (T_\varphi(u))(x)\right| = \left|\int_0^1 (\mu_n(x,y) - \mu(x,y))\,u(y)dy\right| \leq \left|\int_0^1 |(\mu_n - \mu)(x,y)|\,|u(y)|\,dy\right|$
$\left|(T_{\varphi_n}(u) - (T_\varphi(u))(x)\right| \leq \int_0^1 N_\infty(\mu_n - \mu)N_\infty(u)\,dy \leq N_\infty(\mu_n - \mu)N_\infty(u)$
Avec $N_\infty(u) \leq 1$ on obtient $N_\infty\left(T_{\varphi_n}(u) - T_\varphi(u)\right) \leq N_\infty(\mu_n - \mu)$ donc on a:
$\left\|T_{\varphi_n} - T_\varphi\right\|_\infty \leq N_\infty(\mu_n - \mu)$ et $\left\|T_{\varphi_n} - T_\varphi\right\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$

IV Etude d'une application

1.On prend $\mu(x,y) = \sin(x,y)$ $\varphi(x,y,z) = \mu(x,y).z$ $r == N_\infty(\mu) = \sin 1.$

Or $-1 \in \left]-\frac{1}{\sin 1}, \frac{1}{\sin 1}\right[$ donc on peut appliquer l'étude précédente $S_{(\varphi,-1)}$ est un isomorphisme. Donc il existe un unique $w \in C([0,1], \mathbf{R})$ tel que pour tout x de $[0,1]$ $x = w(x) - \int_0^1 \sin(x,y)w(y)dy$

2.1 $.w_1(x) = x(1 + \int_0^1 yw_1(y)dy)$ Donc si des solutions existent elles sont de la forme $w_1(x) = a.x$

avec $a = 1 + \int_0^1 yw_1(y)dy$ d'où $a = 1 + \int_0^1 ay^2dy$ qui donne necessairement $a = \frac{3}{2}$. On vérifie que $w_1(x) = 1,5.x$ est bien solution. D'où l'existence et l'unicité.

2.2 On pose pour $x \in [0,1]$ $e_i(x) = x^i$. $\{e_1, e_3 ... e_{2i+1} .... e_{2n-1}\}$ est une famille libre de $C([0,1], \mathbf{R})$. w_n est une solution de (E_n) ssi :

$$w_n(x) = e_1(x) + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} \int_0^1 y^{2i-1} w_n(y)dy\right] e_{2i-1}(x)$$

En raison de la liberté de la famille on a en posant

$$w_n = \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1,n} e_{2i-1}$$

l'équivalence avec le système linéaire:

$$\begin{aligned}
a_{1,n} &= 1 + \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} a_{2j-1,n} y^{2j}.dy \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{2i-1,n} &= \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} a_{2j-1,n} y^{2i+2j-2}.dy \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{2n-1,n} &= \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} a_{2j-1,n} y^{2n+2j-2}.dy
\end{aligned}$$

qui donne le système:

$$\begin{aligned}
a_{1,n} &= 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{2j-1,n}}{2j+1} y^{2j}. \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
(-1)^{i+1} (2i-1)! a_{2i-1,n} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{2j-1,n}}{2i+2j-1} \\
& \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
.\,(-1)^{n+1} (2n-1)! a_{2n-1,n} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{2j-1,n}}{2n+2j-1}
\end{aligned}$$

2.3 On pose $\varphi_n(x, y, z) = v_n(x, y).z \quad r_n = N_\infty(v_n)$.

On a la convergence uniforme de la série entière de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} t^{2n-1}$ nrs $t \to \sin t$ sur $[0, 1]$. Pour t fixé la série numérique associée est alternée et la valeur absolue de son terme général tend vers zéro en décroissant. La valeur absolue du reste d'ordre p est donc inférieure à $\frac{1}{2p+1} \quad \left(t^{2p-1} \leq 1\right)$. . Pour $p \geq 2$ on a $N_\infty (v_p - v) \leq \frac{1}{5!}$ donc ce qui garantie que $N_\infty (v_p) \in \left[\sin 1 - \frac{1}{5!}, \sin 1 + \frac{1}{5!}\right] \subset]0, 1[$ et que l'on peut conclure avec II3 car alors pour $n \geq 2 \; -1 \in \left[-\frac{1}{N_\infty(v_n)}, \frac{1}{N_\infty(v_n)}\right]$ et (E_n) admet une solution unique.

2.4 Dans 2.3 on a vu que $N_\infty (v_n - v) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ avec III.3 on a $\left\|T_{\varphi_n} - T_\varphi\right\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$. On a donc le résultat avec II.4.2.

Fin