Jérôme Von Buhren
http://vonbuhren.free.fr

Problème des urnes de Pólya

On fixe deux entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. Nous allons procéder à des tirages successifs dans cette urne de la manière suivante.

i) Si la boule tirée est de couleur blanche, nous replaçons la boule tirée dans l'urne avec une boule blanche supplémentaire.

ii) Si la boule tirée est de couleur rouge, nous replaçons la boule tirée dans l'urne avec une boule rouge supplémentaire.

L'objectif de ce problème est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Nous étudierons aussi la loi du nombres de boules blanches dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule sortie au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule sortie au n-ième tirage est rouge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note également

$$S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

I. Préliminaires

I.1) Conjecture pour la loi de X_n.

I.1.A) Déterminer la loi de X_1.

I.1.B) Dresser un arbre décrivant la situation étudiée pour les deux premiers tirages.

I.1.C) En déduire que X_2 a la même loi que X_1.

I.1.D) Que peut-on conjecturer pour la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

I.2) Interprétation de la variable aléatoire S_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

I.2.A) Que représente la variable aléatoire S_n ?

I.2.B) Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

II. Étude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1) Dresser un arbre décrivant la situation étudiée pour les trois premiers tirages.

II.2) Montrer que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$ pour chaque entier $n \in [\![1, 3]\!]$.

Tournez svp

II.3) Loi de la variable aléatoire S_n. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$.

II.3.A) Combien y a-t-il de boules dans l'urne juste avant de procéder au $(n+1)$-ième tirage ?

II.3.B) Calculer les probabilités $P(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)$ pour $\ell \in [\![1, n+1]\!] \setminus \{k-1, k\}$.

II.3.C) Calculer les probabilités $P(S_{n+1} = k \mid S_n = k)$ et $P(S_{n+1} = k \mid S_n = k-1)$.

II.3.D) Justifier que $\big((S_n = 1), (S_n = 2), \ldots, (S_n = n+1)\big)$ est un système complet d'évènement.

II.3.E) Déduire des questions précédentes la relation

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{n+2-k}{n+2} \cdot P(S_n = k) + \frac{k-1}{n+2} \cdot P(S_n = k-1).$$

II.3.F) Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.4) Loi de la variable aléatoire X_n.

II.4.A) En déduire la loi de la variable aléatoire X_n.

II.4.B) Pouvais-t-on prévoir le résultat ?

III. Le cas général

III.1) Formule de récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

III.1.A) Pour $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)$.

III.1.B) Justifier l'égalité

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{n+b} P(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) P(S_n = k).$$

III.1.C) En déduire que

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathrm{E}(S_n)}{b+r+n}.$$

III.2) Conclusion. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

III.2.A) Calculer l'espérance de S_n.

III.2.B) En déduire la loi X_{n+1}.

III.2.C) En déduire la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

FIN DU PROBLÈME