Chapitre 3
Réduction d'endomorphismes

Dans toute la feuille, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Diagonaliser une matrice

On se donne une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ que l'on souhaite diagonaliser sur $\mathbb{K}$.

Méthode : Diagonaliser une matrice

1) On calcule le polynôme caractéristique de A.
   a) Si χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$. On ne peut pas la diagonaliser sur $\mathbb{K}$.
   b) Sinon, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de A, puis :
2) On détermine une base $\mathscr{B}_k$ de chaque espace propre $E_{\lambda_k}(A)$ de A.
   a) Si pour une valeur propre λ_k de A, on a $\dim(E_{\lambda_k}(A)) < m_{\lambda_k}(A)$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$. On ne peut pas la diagonaliser sur $\mathbb{K}$.
   b) Sinon :
3) On note $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p)$ qui est une base de $\mathbb{K}^n$. Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a par la formule du changement de base

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}}$$

et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice diagonale

$$D = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1}(A)}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_{\lambda_2}(A)}, \ldots, \underbrace{\lambda_p, \ldots, \lambda_p}_{m_{\lambda_p}(A)}).$$

Exemple 1

On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Le polynôme χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, car ses racines ne sont pas dans $\mathbb{R}$. On en déduit que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2

On reprend la matrice A de l'exemple précédent que l'on souhaite diagonaliser sur $\mathbb{C}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$ qui est scindé sur $\mathbb{C}$. On obtient que $\mathrm{Sp}(A) = \{i, -i\}$. On détermine une base de chacun des espaces propres.

$$E_i(A) = \mathrm{Ker}(i\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right)$$

$$E_{-i}(A) = \mathrm{Ker}(-i\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right).$$

On a bien

$$\dim E_i(A) = 1 = m_i(A) \quad \text{et} \quad \dim E_{-i}(A) = 1 = m_{-i}(A),$$

donc la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Finalement, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}_{P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}}} \underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & i/2 \\ 1/2 & -i/2 \end{pmatrix}}_{P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}}^{-1}}.$$

Remarque 1
On constate dans l'exemple ci-dessus que les vecteurs propres sont conjugués. En fait, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une valeur propre de A, alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A et les espaces propres sont conjugués. En effet, on a

$$X \in E_\lambda(A) \quad \Leftrightarrow \quad AX = \lambda X \quad \underset{\substack{Conjugaison \\ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{\Longleftrightarrow} \quad A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{X} \in E_{\bar{\lambda}}(A).$$

En particulier, si on a $E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_p)$, alors

$$E_{\bar{\lambda}}(A) = \mathrm{Vect}(\bar{X_1}, \ldots, \bar{X_p}).$$

Exemple 3
On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$$

qui est scindé sur $\mathbb{R}$. On obtient que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. On détermine une base de l'espace propre.

$$E_1(A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, on a

$$\dim E_1(A) = 1 < 2 = m_1(A),$$

donc la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4
On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$$

qui est scindé sur $\mathbb{R}$. Les valeurs propres de A sont 1 et 4. On détermine une base de chacun des espaces propres.

$$E_1(A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_4(A) = \mathrm{Ker}(4\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

On a bien

$$\dim E_1(A) = 2 = m_1(A) \quad \text{et} \quad \dim E_4(A) = 1 = m_4(A),$$

donc la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Finalement, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}}^{-1}}.$$

Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

On suppose que l'on dispose d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. On vient de voir comment trouver une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. On peut utiliser cette forme pour calculer facilement les puissances de A. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k \\ &= (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}D\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}DP^{-1})\cdots(PD\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}DP^{-1}) \\ &= PD^kP^{-1}. \end{aligned}$$

Comme D est diagonale, on a

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & (0) \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Comme l'on connait P, D^k et P^{-1}, on peut calculer A^k.

Remarque 2

Si on a seulement trigonalisé la matrice A, i.e. si on a déterminé une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$, alors on a encore

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = PT^kP^{-1}.$$

Cependant, il faut réussir à calculer T^k pour en déduire A^k. (Il n'y a pas de formule générale pour T^k comme pour D^k).

Exemple 5

On souhaite calculer les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

D'après l'exemple 4, on a

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^k+2 & 4^k-1 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k+2 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k-1 & 4^k+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$