Chapitre 5
Intégration d'une fonction sur un intervalle

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Comparaison avec une intégrale de Riemann

Le règle suivante ne fait pas partie du programme, mais elle est très utile en pratique. Il faut donc rédiger **entièrement** la démonstration à chaque fois.

Règle de Riemann en $+\infty$

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{K}$ une fonction continue et soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$.
Si $\lim\limits_{t\to+\infty} t^a|f(t)| = 0$, alors pour tout réel $t > 0$ suffisamment grand, on a

$$0 \leqslant t^a|f(t)| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant |f(t)| \leqslant \frac{1}{t^a}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge absolument par comparaison, donc elle converge.

Exemple 1

Montrons que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ est convergente. Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-\sqrt{t}} = 0$, donc pour tout réel $t > 0$ suffisamment grand, on a

$$0 \leqslant t^2 e^{-\sqrt{t}} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant e^{-\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, on obtient par comparaison que l'intégrale I est convergente.

Règle de Riemann en 0

Soit $f :]0,1] \to \mathbb{K}$ une fonction continue et soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a < 1$.
Si $\lim\limits_{t\to 0} t^a|f(t)| = 0$, alors pour tout réel $t > 0$ suffisamment petit, on a

$$0 \leqslant t^a|f(t)| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant |f(t)| \leqslant \frac{1}{t^a}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^a}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} f(t)dt$ converge absolument par comparaison, donc elle converge.

Exemple 2

Montrons que $I = \displaystyle\int_0^{1} \ln(t)^3 dt$ est convergente. Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{1/2}|\ln(t)^3| = 0$, donc pour tout réel $t > 0$ suffisamment petit, on a

$$0 \leqslant t^{1/2}|\ln(t)^3| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant |\ln(t)^3| \leqslant \frac{1}{t^{1/2}}.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^{1/2}}$ est une intégrale de Riemann convergente, on obtient par comparaison que l'intégrale I est convergente.

Intégration par partie et intégrales généralisées

Il n'y a pas de théorème d'intégration par partie pour des intégrales généralisées. On doit passer par une intégrale classique.

Exemple 3

On souhaite établir la convergence et calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt$. On se ramène à une intégrale classique. Pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A te^{-t}dt = [-te^{-t}]_0^A + \int_0^A e^{-t}dt = -Ae^{-A} + [-e^{-t}]_0^A = -Ae^{-A} - e^{-A} + 1.$$

En prenant la limite lorsque $A \to +\infty$, on obtient que l'intégrale I est convergente par définition et que sa valeur est $I = 1$.

Exemple 4

On souhaite établir la convergence de $I = \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt$. Pour $A > 0$, on a

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt = \left[\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right]_\pi^A + \frac{1}{2}\int_\pi^A \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}dt = \frac{\sin(A)}{\sqrt{A}} + \frac{1}{2}\int_\pi^A \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}dt.$$

On a l'inégalité $0 \leqslant \left|\frac{\sin(t)}{t^{3/2}}\right| \leqslant \frac{1}{t^{3/2}}$ pour tout $t \in [\pi, +\infty[$ et l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}dt$ est une intégrale absolument convergente, donc convergente.
De plus, lorsque $A \to +\infty$, on a $\sin(A)/\sqrt{A} \to 0$. On en déduit en prenant la limite lorsque $A \to +\infty$ dans le relation ci-dessus, que l'intégrale I est convergente, et que l'on a la relation

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{3/2}}dt.$$

Étudier la convergence d'une intégrale

On souhaite étudier le convergence d'une intégrale $\int_a^b f(t)dt$ où f est une fonction continue.

Méthode : Convergence d'une intégrale

1) On détermine si f est définie sur $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$. (Autrement dit, on cherche si l'intégrale est généralisée et si oui, à cause de quels points).
   a) Si f est définie sur $[a, b]$, l'intégrale n'est pas généralisée, donc elle est convergente.
   b) Si f n'est que définie sur $]a, b[$, on sépare l'intégrale en deux pour se ramener au cas où seul une des deux extrémités de l'intervalle d'intégration peut poser un problème de convergence.
2) On s'est donc ramené au cas où f est définie et continue sur $[a, b[$ (ou $]a, b]$). On essaye d'utiliser les différents résultats du cours pour décider de la nature de l'intégrale dans l'ordre suivant.
   a) Un équivalent $|f(t)| \sim g(t)$ en b,
   b) Une inégalité $0 \leqslant |f(t)| \leqslant g(t)$ au voisinage de b,
   c) La règle de Riemann,
   d) Un changement de variable pour transformer l'intégrale.
   e) Une intégration par partie pour transformer l'intégrale.
3) Dans le cas où on avait séparé l'intégrale de départ, on conclut (Par définition, l'intégrale converge si les deux intégrales obtenus après la séparation convergent).

Exemple 5

Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

La fonction $f : t \mapsto e^{-t}/\sqrt{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier la convergence des intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

- La fonction f est positive sur $]0, 1]$ et on a $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ lorsque $t \to 0^+$. Or $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} dt$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par comparaison, l'intégrale I_1 converge
- La fonction f est positive sur $[1, +\infty[$ et on a
$$\forall t \geqslant 1, \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant e^{-t}.$$
Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ est une intégrale de référence convergente, donc par comparaison, l'intégrale I_2 converge.

Les intégrales I_1 et I_2 convergent, donc l'intégrale I est convergente.

Exemple 6

Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

La fonction $f : t \mapsto \sin(t)/t^2$ est continue sur $[1, +\infty[$. De plus, on a l'inégalité

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leqslant \left| \frac{\sin(t)}{t^2} \right| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc par comparaison, l'intégrale I est absolument convergente, donc I est convergente.

Exemple 7

Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

La fonction $f : t \mapsto e^{-t}/t$ est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier la convergence des intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

- La fonction f est positive sur $]0, 1]$ et on a $f(t) \sim \frac{1}{t}$ lorsque $t \to 0^+$. Or $\int_0^1 \frac{dt}{t} dt$ est une intégrale de Riemann divergente, donc par comparaison, l'intégrale I_1 diverge.
- L'étude de la convergence de I_2 est inutile.

Comme l'intégrale I_1 diverge, on conclut que l'intégrale I diverge.

Exemple 8

Nous allons étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ La fonction $f : t \mapsto 1/\sqrt{1-t}$ est continue sur $[0, 1[$. En posant $u = 1 - t$ dans I, on obtient l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

L'intégrale J est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale I est convergente et on a $I = J$.