

Chapitre 4

Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Restriction de l'intervalle d'étude

On considère une courbe paramétrée par $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Nous allons voir comment exploiter les propriétés de la fonction $f = (x, y)$ pour restreindre l'intervalle d'étude.

Périodicité

Si f est T -périodique, alors le point $f(t)$ est le même que le point $f(t+T)$, donc il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur T .

Propriété	Restriction	Transformation
x et y sont T -périodiques	Intervalle de longueur T	identité

Parité

Si x est paire et y est impaire, alors le point $f(-t)$ est l'image par la symétrie d'axe (Ox) du point $f(t)$. Il suffit donc de tracer la courbe paramétrée par f sur l'intervalle $I \cap \mathbb{R}_+$. On en déduit le tracé de la courbe sur l'intervalle I en entier en utilisant la symétrie par rapport à l'axe (Ox) .

Tout les cas sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Propriété	Restriction	Transformation
x paire et y paire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Identité
x paire et y impaire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Symétrie par rapport à (Ox) .
x impaire et y paire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Symétrie par rapport à (Oy) .
x impaire et y impaire	$I \cap \mathbb{R}_+$	Symétrie par rapport à O .

Tracer une courbe paramétrée du plan

On considère une courbe paramétrée par $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. On suppose que $f = (x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Méthode : Tracer une courbe paramétrée du plan

- 1) On détermine l'ensemble de définition de f et on essaye de restreindre l'intervalle d'étude (voir les tableaux précédents).
- 2) On dresse le tableau commun pour les variations de x et y sur I .
 - a) On détermine les $t \in I$ vérifiant $x'(t) = 0$ ou $y'(t) = 0$.
 - b) On dresse le tableau commun pour les signes de x' et y' .
 - c) On en déduit le tableau commun pour les variations de x et y sur I .
- 3) On détermine les tangentes à la courbe paramétrée à chaque point $f(t)$ pour les valeurs de $t \in I$ apparaissant dans le tableau de variation.
- 4) On trace la courbe.
 - a) On place sur le graphique les différents points $f(t)$ pour les valeurs de $t \in I$ apparaissant dans le tableau de variation.
 - b) On trace en ces points les tangentes à la courbe paramétrée.
 - c) On relie les points en respectant les tangentes et le sens de variation de x et y .
- 5) Afin d'obtenir toute la courbe, on effectue les transformations qui nous ont permis de restreindre l'intervalle d'étude.

Exemple 1

Nous allons tracer la courbe paramétrée par la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (\cos(3t), \sin(2t)).$$

- 1) La fonction f est 2π -périodique, on peut donc restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$. De plus, la fonction x est paire et la fonction y est impaire, donc on peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$. Le reste du tracé s'en déduira en appliquant la symétrie par rapport à (Ox) .

2) Dressons un tableau de variation pour x et y . On a

$$\begin{aligned} x'(t) = 0 &\Leftrightarrow -3\sin(3t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}, \\ y'(t) = 0 &\Leftrightarrow 2\cos(2t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}. \end{aligned}$$

On obtient donc le tableau de variation suivant.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$x'(t)$	0	-	0	+	0	-
x	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$y'(t)$	+	0	-	0	+	
y	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1

3) En regardant la tableau de variation, on observe que $f'(t) = (0, \alpha)$ avec $\alpha \neq 0$ pour chaque $t = 0, \pi/3, 2\pi/3$ et $t = \pi$. Ainsi, au point correspondant, la tangente à la courbe est verticale.

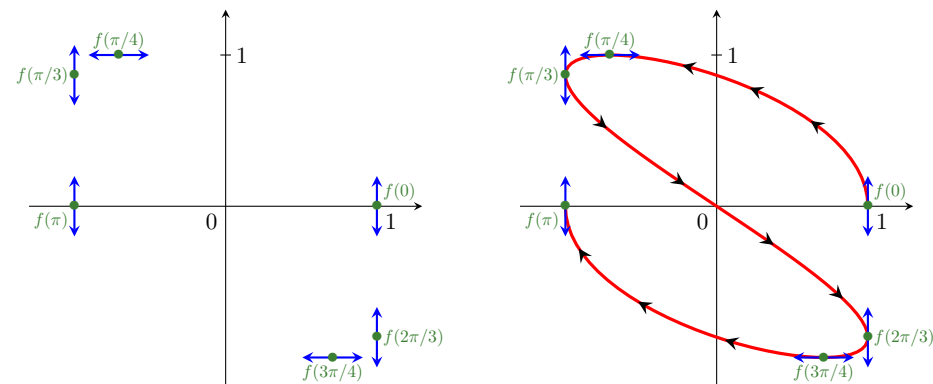
En regardant la tableau de variation, on observe que $f'(t) = (\alpha, 0)$ avec $\alpha \neq 0$ pour chaque $t = \pi/4$ et $3\pi/4$. Ainsi, au point correspondant, la tangente à la courbe est horizontale.

4) On peut commencer à tracer la courbe paramétrée.

- On place les points $f(0), f(\pi/4), f(\pi/3), f(2\pi/3), f(3\pi/4)$ et $f(\pi)$ sur le graphique.
- On trace la tangente à la courbe en chacun de ces points.

c) De $t = 0$ à $t = \pi/4$, la courbe va de $f(0)$ à $f(\pi/4)$. De plus, sur cet intervalle, la fonction x est décroissante et la fonction y est croissante, donc la courbe se dirige vers la haut à gauche. On relie donc le point $f(0)$ au point $f(\pi/4)$ en respectant les tangentes et la direction que suit la courbe. Ensuite, on répète l'opération sur les intervalles suivants.

On obtient le tracé suivant de la courbe paramétrée par f sur $[0, \pi]$.



5) Pour obtenir le tracé sur $\mathbb{R}$ en entier, il suffit d'appliquer la symétrie par rapport à l'axe (Ox) .

