Chapitre 8
Espaces préhilbertiens

L'algorithme de Gram-Schmidt

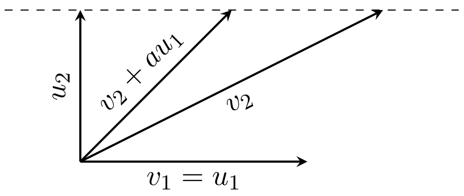
Rappelons que nous avons vu le théorème suivant dans le cours.

Théorème 1 (Théorème de Gram-Schmidt)**.**
Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe une unique famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_p)$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \quad et \quad (e_k \mid v_k) > 0.$$

L'algorithme de Gram-Schmidt permet de construire la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ du théorème.

Illustration 1



L'algorithme de Gram-Schmidt

Méthode : l'algorithme de Gram-Schmidt
On commence par construire une famille orthogonale $(u_1, \ldots, u_p)$ vérifiant les conditions du théorème.

1. On pose $u_1 = v_1$.
2. On cherche u_2 sous la forme
$$u_2 = v_2 + au_1 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$
On souhaite que u_2 et u_1 soit orthogonaux, i.e.
$$(u_2 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_2 \mid u_1) + a(u_1 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(v_2 \mid u_1)}{(u_1 \mid u_1)}.$$
On trouve ainsi u_2.
3. On itère le procédé. Si on a construit $(u_1, \ldots, u_{k-1})$, on cherche u_k sous la forme
$$u_k = v_k + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{k-1} u_{k-1} \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{R}.$$
Pour $i \in [\![1, k-1]\!]$, on souhaite que u_k soit orthogonale à u_i, i.e.
$$(u_k \mid u_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_k \mid u_i) + \lambda_i(u_i \mid u_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = -\frac{(v_k \mid u_i)}{(u_i \mid u_i)}.$$
4. A la fin du procédé, on a construit une famille orthogonale $(u_1, \ldots, u_p)$ de vecteurs non nuls. On en déduit la famille orthonormée $(e_1, \ldots, e_p)$ vérifiant les conditions du théorème en normalisant les vecteurs u_i
$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}.$$

Exemple 1

On cherche une base orthonormée de l'espace vectoriel

$$H = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \quad \text{où} \quad v_1 = (1,0,1) \ \text{ et } \ v_2 = (1,1,0)$$

muni de la restriction du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à la base (v_1, v_2) de H.

1. On pose $u_1 = v_1$.
2. On cherche u_2 sous la forme

$$u_2 = v_2 + au_1 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que u_2 et u_1 soit orthogonaux, i.e.

$$(u_2 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_2 \mid u_1) + a(u_1 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(v_2 \mid u_1)}{(u_1 \mid u_1)} = -\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$u_2 = v_2 - \frac{1}{2}u_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right).$$

3. Ainsi la famille (u_1, u_2) est une base orthogonale de H et on en déduit une base orthonormée (e_1, e_2) de H avec

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Exemple 2

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire donnée par

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2, \quad (P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Nous allons construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base $(1, X, X^2)$.

1. On pose $Q_0 = 1$.
2. On cherche Q_1 sous la forme

$$Q_1 = X + aQ_0 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que Q_0 et Q_1 soit orthogonaux, i.e.

$$(Q_1 \mid Q_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X \mid Q_0) + a(Q_0 \mid Q_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(X \mid Q_0)}{(Q_0 \mid Q_0)} = 0.$$

On a donc $Q_1 = X$.

3. On cherche Q_2 sous la forme

$$Q_2 = X^2 + bQ_1 + cQ_0 \quad \text{avec} \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que Q_2 soit orthogonal à Q_0 et Q_1, donc

$$(Q_2 \mid Q_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X^2 \mid Q_0) + c(Q_0 \mid Q_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -\frac{(X^2 \mid Q_0)}{(Q_0 \mid Q_0)} = -\frac{1}{3}.$$

$$(Q_2 \mid Q_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X^2 \mid Q_1) + b(Q_1 \mid Q_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{(X^2 \mid Q_1)}{(Q_1 \mid Q_1)} = 0.$$

On a donc $Q_2 = X^2 - 1/3$.

4. Ainsi la famille $\left(1, X, X^2 - \frac{1}{3}\right)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$. On en déduit une base orthonormée (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ en normalisant les vecteurs de la base orthogonale (Q_0, Q_1, Q_2)

$$P_0 = \frac{Q_0}{\|Q_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1 = \frac{Q_1}{\|Q_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}X, \quad P_2 = \frac{Q_2}{\|Q_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(3X^2 - 1\right).$$