Jérôme Von Buhren
http://vonbuhren.free.fr

La formule de Stirling

L'objectif de ce problème est de démontrer la formule de Stirling suivante

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

I. Un résultat intermédiaire

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

I.1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

I.2) En utilisant un développement limité, montrer que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$.

I.3) En déduire que la série de terme générale (v_n) est convergente.

I.4) Montrer que $S_n = \ln(u_{n+1}) - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I.5) En déduire que la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un nombre $\ell \in \mathbb{R}$.

I.6) En déduire qu'il existe un réel $C > 0$ telle que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

II. Étude des intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les intégrales définies par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt.$$

II.1) Calcul des intégrales de Wallis.

II.1.A) Calculer W_0 et W_1.

II.1.B) Avec une intégration par partie, montrer que $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1.C) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{4^p(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Tournez svp

II.2) Un équivalent des intégrales de Wallis.

II.2.A) En utilisant la question II.1.B), montrer que $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante de valeur $\pi/2$.

II.2.B) Démontrer que la suite (W_n) est décroissante et positive.

II.2.C) En déduire, en utilisant l'encadrement $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$, la relation $W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n-1}$.

II.2.D) Conclure que la suite (W_n) converge vers 0 et que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

III. Calcul de la constante C

On a montré à la question I.6) qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. Dans cette partie, nous allons déterminer la valeur de C en utilisant les résultats de la partie précédente.

III.1) En utilisant les résultats des questions I.6) et II.1.C), montrer que $W_{2p} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{C\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{p}}$.

III.2) En déduire avec le résultat de la question II.2.D) que $C = \sqrt{2\pi}$.

III.3) En déduire la formule de Stirling.

IV. Une application

On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}.$$

IV.1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_n = \frac{1}{2}\frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}.$$

IV.2) En utilisant la formule de Stirling, montrer que la suite (p_n) converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.

Fin du Problème