TSI2 — Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques — 2016/2017 - J. Aurouet

Feuille de TD 9

Exercice 1 : Fonctions triangles. Calculer les coefficients de Fourier de :

1) f, 2π-périodique, définie par :

$$\forall t \in]0, 2\pi[\,, \quad f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq \pi \\ 2\pi - t & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

2) g, 2π-périodique, définie par :

$$\forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\,, \quad g(t) = \begin{cases} t & \text{si } |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - t & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq |t| \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice 2 : Calculer les coefficients de Fourier de la fonction h définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = \frac{1}{1 + \cos^2(t)}.$$

Exercice 3 : Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$:

1) $$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n}$$ **2)** $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

3) $$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

Exercice 4 : Signal en peigne. Soit f la fonction 2π-périodique, définie par : $\forall x \in]-\pi, \pi[, f(x) = x$. Calculer les coefficients de Fourier de f. Puis en appliquant le théorème de Parseval, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 5 : Signal quadratique par morceaux Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique égale à $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire les valeurs de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 6 : Signal en ponts. Soit g la fonction 2π-périodique, définie par : $\forall x \in]-\pi, \pi[, g(x) = |\sin(x)|$. Calculer les coefficients de Fourier de g. Puis calculer :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}^2.$$

Exercice 7 : Signal exponentiel par morceaux. Soit f la fonction 2π-périodique, définie par : $\forall x \in]-\pi, \pi[, f(x) = e^x$.

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.
2) Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 8 : Soit f, 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer que :

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt \leq \int_0^{2\pi} f'(t)^2 dt$$

Quelles sont les fonctions qui réalisent l'égalité ?