# Feuille de TD 7

**Exercice 1 : Norme d'algèbre sur les matrices.** On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ :

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad N(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$$

**1)** Montrer que $N$ définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
**2)** Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad N(AB) \leq nN(A)N(B)$.

**Exercice 2 : Normes tordues sur $\mathbb{R}^2$.** Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On pose :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$$

**1) a)** Montrer que $N$ définit bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
**b)** Représenter la boule de centre 0 et de rayon 1.
**2)** Mêmes questions avec l'application :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad N(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t + t^2}$$

**Exercice 3 :** Soit $E$ un espace préhilbertien, et $A$ et $B$ deux parties de E.
**1) a)** Montrer que $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
**b)** Montrer que $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
**2)** Soient maintenant $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Que se passe-t-il en dimension finie ?
**3)** Soient deux applications $f, g : E \longrightarrow E$ telles que :

$$\forall x, y \in E, \quad < f(x)|y > = < x|g(y) >$$

Montrer que $f$ et $g$ sont linéaires.

**Exercice 4 :** Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E, \quad < f|g > = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

On pose :

$$F = \{f \in E \mid \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\}, \quad \text{et} \quad G = \{g \in E \mid \forall t \in [0, 1], g(t) = 0\}$$

**1)** Montrer que $F^\perp = G$.
**2)** Les sous-espaces $F$ et $G$ sont-ils supplémentaires ?

**Exercice 5 :**
**1)** Montrer que $< A|B >= tr({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
**2)** Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux. Exprimer la distance de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
**3) a)** Montrer que l'ensemble $H$ des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
**b)** Donner la distance à $H$ de la matrice $J$ dont tous les coefficients valent 1.

**Exercice 6 :** Sur l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré 2 à coefficients réels, orthonormaliser la base canonique selon le procédé de Gram-Schmidt pour le produit scalaire :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X], \quad < P|Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Même question avec le produit scalaire définit par :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X], \quad < P|Q >= \int_{0}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

Puis calculer :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt.$$

**Exercice 7 :**

**1)** Montrer que $< P|Q >= P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
**2)** Calculer $d(X^2, P)$, où $P = \{ax + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

**Exercice 8 :** Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On considère l'application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

**1)** Justifier que l'application $\varphi$ est bien définie sur $E \times E$.
**2)** Montrer que $\varphi$ définit un produit scalaire sur $E$.
**3)** Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer $\varphi(X^p, X^q)$.
**4)** Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.
**5)** Déterminer :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 dt.$$