Feuille de TD 6

Exercice 1 : Diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Diagonaliser la matrice A définie ci-dessous, dans $\mathbb{R}$ si possible, sinon dans $\mathbb{C}$.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour que la matrice suivante soit diagonalisable :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Calcul des racines carrée d'une matrice diagonalisable.
Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $M^2 = A$ où :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : Peut-on diagonaliser la matrice B ?

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Informatique - Déterminer la largeur du spectre.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soit λ_k la valeur propre de M de module maximal. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{tr(M^n)}{tr(M^{n-1})} = \lambda_k$$

Exercice 7 : Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$M \text{ est nilpotente} \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ tr(M^n) = 0$$

Exercice 8 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Que peut-ont dire lorsque f n'est pas diagonalisable ?

Exercice 9 : Une once de topologie.

a) Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
b) Montrer que l'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
c) Quand est-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercices supplémentaires :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme inversible. Montrer que f^{-1} est un polynôme en f.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que M est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

b) Montrer que M est nilpotente si et seulement si 0_n appartient à l'adhérence de la classe de similitude de M.
