Feuille de TD 2

Exercice 1 : Déterminer la nature et la somme des séries suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ 2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2-2n+2}\right)$ 4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ 6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$

Exercice 2 : Déterminer la nature de la série de terme général :

1) $(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}$ 2) $\dfrac{\tan(\frac{1}{n})\left(\frac{1}{n}-\sin(\frac{1}{n})\right)}{1-\cos(\frac{1}{n})}$

3) $\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n\alpha}, \quad \alpha > 0$ 4) $\cos\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n, \quad \alpha > 0$

Exercice 3 :

1) Soit (a_n) une suite de réels, montrer que si $\sum a_n^2$ converge, alors $\sum \frac{a_n}{n}$ converge. Réciproque ?

2) Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum \frac{a_k}{k}$ converge. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Indication : On posera $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$ *et on écrira* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ *en fonction des* S_k.

Exercice 4 : Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta},$$

où α et β sont des réels fixés.
1) Pour quelles valeurs de α et β la série est-elle grossièrement divergente ?
2) Montrer que si $\alpha > 1$ alors la série converge quelle que soit la valeur de β.
3) Montrer que si $\alpha < 1$ alors la série diverge quelle que soit la valeur de β.
4) Supposons maintenant que $\alpha = 1$.
a) Si $\beta \leq 0$, montrer alors que la série diverge.
b) Supposons $\beta > 0$.

i) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)^\beta}$ est strictement décroissante sur $]2, +\infty[$.

ii) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)^\beta}$ en utilisant une comparaison série-intégrale.

5) Résumer les différents cas.

6) Application : quelle est la nature de la série $\sum \left(\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}\right)$?

Exercices supplémentaires : Déterminer la nature des séries ayant pour terme général :

(Faciles)

1) $u_n = 2^{-\frac{1}{n}}$
2) $u_n = \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$
3) $u_n = \sin n$
4) $u_n = \cos n$
5) $u_n = \cos(n\pi)$
6) $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
7) $u_n = \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
8) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
9) $u_n = 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$
10) $u_n = \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$
11) $u_n = \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$
12) $u_n = (-1)^n\frac{\sin(\sqrt{n})}{n^{3/2}}$
13) $u_n = \frac{1}{2^n+2}$
14) $u_n = \frac{1}{n^2+\sin n}$
15) $u_n = \frac{1}{2^{nx}}$ avec $x \in \mathbb{R}$
16) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

(Moyens)

1) $u_n = \frac{n!}{n^n}$
2) $u_n = \frac{n!}{a^n}$ avec $a > 0$
3) $u_n = \frac{2n}{n+2^n}$
4) $u_n = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - 1$
5) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^2}$
7) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
8) $u_n = \frac{\ln n}{2n^3-1}$
9) $u_n = \frac{\ln n}{n^2+3}$
10) $u_n = \exp(-n^2)$
11) $u_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
12) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$
13) $u_n = \sqrt[n]{n}$
14) $u_n = \binom{n}{2}a^{2n}$ avec $a \in \mathbb{R}$
15) $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
16) $u_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$
17) $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$
18) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$
19) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$
20) $u_n = \frac{a^n}{n+1}$ avec $a \in \mathbb{R}$
21) $u_n = \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$
22) $u_n = (-1)^n\frac{\ln n}{e^n}$
23) $u_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}a^n$ avec $a > 0$
24) $u_n = (-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

(Difficiles)

$$\frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}, \quad \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n}, \quad \frac{1}{\ln^2(2)+\cdots+\ln^2(n)}, \quad \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3^n n!}$$

$$\arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right), \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \text{ avec } \alpha > 1, \quad a^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\cdots+\frac{1}{p+n}}, \ a > 0 \text{ et } p \in \mathbb{N}^*$$

$$, \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^{n^2\ln^5(n)}\,dx$$