TSI2 Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques 2015/2016 - J. Aurouet

Feuille de TD 17

Exercice 1 :

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x-1)(y-2)(x+y-6)$.
1) Les points de coordonnées $(4, 2)$ et $(2, 3)$ sont-ils des points critiques ?
2) La fonction f présente-t-elle un extremum local en $(4, 2)$? en $(2, 3)$?

Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les éventuels points critiques de la fonction et pour chacun d'eux déterminer s'il s'agit d'un extremum local.
1) $f : (x, y) \mapsto \sin(x) + y^2 - 2y + 1$.
2) $g : (x, y) \mapsto xy(x + y - 1)$.
3) $h : (x, y) \mapsto x^3 + 2xy - 2x^2 + y^2$.
4) $k : (x, y) \mapsto xye^{-(x^2+y^2)}$.

Exercice 3 :

1) On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$. Montrer que f admet un minimum en un point (x_0, y_0) à déterminer.
2) Soit g la fonction définie par l'expression $g(x, y) = x(\ln(x)^2 + y^2)$. Déterminer le domaine de définition de g ainsi que ses extrema locaux.
3) Soit h la fonction définie par $h(x, y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(1 + x)(1 + y)$. Déterminer les extrema locaux de h sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 : Lignes de niveaux.

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer le domaine de définition et représenter les courbes de niveaux pour les valeurs de k indiquées, ainsi que l'orientation du gradient sur ces courbes :
1) $f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad k = -1,\ k = 0,\ k = 1,\ k = 2,\ k = 3.$
2) $f_2(x, y) = \frac{y}{x}, \quad k = -1,\ k = 0,\ k = 1,\ k = 2,\ k = 3.$
3) $f_3(x, y) = \frac{xy-x+y}{xy}, \quad k = 1,\ k = 2.$
4) $f_4(x, y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}, \quad k = -1,\ k = 0,\ k = 1.$

Exercice 5 :

Déterminer l'équation du plan tangent pour chacune des surfaces ci-dessous au point (x_0, y_0, z_0), et donner un vecteur normal à ce plan :
1) $\sin(\pi xy) + \sin(\pi yz) = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, \frac{1}{6}, 1)$.
2) $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 3, 3)$.
3) $z = \sin(\pi xy) \exp(2x^2y - 1)$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1/2, 1)$.

Exercice 6 :

1) Trouver les points du paraboloïde d'équation $z = 4x^2 + y^2$ où le plan tangent est parallèle au plan $x + y + z = 6$. Même question avec le plan $3x + 5y - 2z = 3$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - 2y^3$.

a) Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}_0$ tangent au graphe $\mathcal{G}$ de f en un point quelconque M_0 de $\mathcal{G}$.

b) Pour le point M_0 de coordonnées $(2, 1, 2)$, déterminer tous les points M tels que le plan tangent en M soit parallèle au plan $\mathcal{P}_0$.

Exercice 7 : Position relative.

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.
1) Déterminer les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ parallèles au plan $0xy$.
2) Étudier la position relative de la surface et de son plan tangent en chacun des points obtenus.

Exercice 8 : Équation aux dérivées partielles.

1) Chercher toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a$$

où a est un réel. On pourra poser $f(u, v) = g(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$.

2) Chercher toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

On pourra chercher un changement de variable de la forme : $u = ax + by$, $v = cx + dy$, avec a, b, c, d réels.

3) équation des cordes vibrantes : Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u = x + at$, $v = x + bt$, où a, b sont réels.