TSI2 Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques 2015/2016 - J. Aurouet

Feuille de TD 16

Exercice 1 : Topologie.

1) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$. Démontrer les égalités et les inclusions suivantes, et démontrer que les inclusions sont strictes :

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$$

2) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 3y^4 < 1\}$ est-il ouvert ? fermé ? borné ?
3) L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 3y^2 \leq 1\}$ est-il ouvert ? fermé ? borné ?
4) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ qui converge vers une limite l. Soit $S = \{u_k | k \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $S \cup \{l\}$ est compact.
5) Démontrer que l'ensemble $\{\cos(n) | n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
Indication : On rappelle que tout sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ ou dense.

Exercice 2 : Continuité.

1) Étudier la continuité et la valeur d'une limite éventuelle des fonctions suivantes :

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{xy}{x^2+y^2}; \frac{xy}{x+y}; \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}; \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y); \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}; \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$

2) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $F(x, y) = \sup_{t\in[-1,1]} xt^2 + yt$. Étudier la continuité de F.

Exercice 3 : Continue et pas différentiable. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par :

$$f(x, y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}.$$

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, puis étudier l'existence de dérivées partielles en $(0, 0)$ pour ce prolongement.

Exercice 4 : Dérivées partielles.

1) Les fonctions suivantes sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

$$\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}, \quad x^2y^2\ln(x^2+y^2), \quad x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \quad e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Toutes définies ainsi lorsque $(x, y) \neq (0, 0)$ et nulle en $(0, 0)$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout (x, y), $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$ si $(x, y) \neq 0$ et $f(0, 0) = 1$.
a) La fonction est-elle continue en $(0, 0)$?
b) Déterminer les dérivées partielles de f en un point distinct de l'origine.
c) La fonction admet-elle des dérivées partielles par rapport à x ou y en $(0, 0)$?

Exercice 5 : Compositions.

1) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$. Montrer que :

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

2) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées (éventuellement partielles) des fonctions suivantes :

$g(x, y) = f(y, x)$; $g(x) = f(x, x)$; $g(x, y) = f(y, f(x, x))$; $g(x) = f(x, f(x, x))$.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(xy) = f(x + y), \quad h(x, y) = f(x^2 + y^2), \quad k(x, y) = f(xy).$$

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
a) On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
b) On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$. Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 6 : Dérivées partielles d'ordres supérieurs.

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :
a) $f(x, y) = x^2(x + y)$ **b)** $f(x, y) = e^{xy}$.
2) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$ on pose

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

a) f admet-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$?
b) f admet-elle un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
c) f admet-elle un prolongement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7 : Fonctions harmoniques, le laplacien en polaire.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et tel que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On pose alors $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ et $F : (r, \theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Montrer que :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0$$