

## Feuille de TD 14

**Exercice 1 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  dérivable, telle que  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ . Montrer que  $|f|$  est croissante si et seulement si  $\Re e \left( \frac{f'}{f} \right) \geq 0$ .

**Exercice 2 :** Soit  $f : ]-1; 1[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :

$$f(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } -1 < t \leq 0 \\ (t^2 \sin(\frac{1}{t}), t^2 \cos(\frac{1}{t})) & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est dérivable sur  $] - 1; 1[$ .

**Exercice 3 :** Donner un développement limité à l'ordre  $n$ , au voisinage de l'origine, des fonctions vectorielles définies ci-dessous :

$$f : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(t) = \left( e^t - 1, \frac{1}{t+1}, \ln(1-t^2) \right), \quad n = 3$$

$$g : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(t) = \left( \frac{1}{(1-t)^2}, \frac{\arctan(t)}{t} \right), \quad n = 4$$

$$u : I_3 \rightarrow \mathbb{R}^2, u(t) = \left( \frac{\cos(t)}{1-\sin(t)}, \frac{\sin^2(t)}{t} \right), \quad n = 3$$

$$v : I_4 \rightarrow \mathbb{R}^3, v(t) = \left( e^{1-\cos(t)}, \cos(\sin(t)), \sqrt{1+t^2} \right), \quad n = 2$$

**Exercice 4 :** Soit  $I$  un intervalle réel non trivial, et soit  $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$  telle que  $\forall t \in I, f(t) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ . On considère l'application  $\varphi$  définie sur l'intervalle  $I$  par :

$$\varphi(t) = \|f(t)\|, \quad \forall t \in I,$$

$\|\dots\|$  désignant la norme euclidienne.

1) Montrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ , et que :

$$\varphi'(t) = \frac{\langle f'(t), f(t) \rangle}{\|f(t)\|}, \quad \forall t \in I$$

2) Calculer  $\varphi''(t)$  pour tout  $t \in I$ .

**Exercice 5 :** Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux fonctions vectorielles de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1) On suppose que  $\forall t \in I$   $f(t)$  et  $g(t)$  sont colinéaires. Est-ce que  $f'(t)$  et  $g'(t)$  sont colinéaires ?

2) On suppose que  $\forall t \in I$ ,  $f'(t)$  et  $g'(t)$  sont colinéaires. Existe-t-il  $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f - \vec{c}$  et  $g$  soient colinéaires ?

**Exercice 6 :** Soit  $I$  un intervalle réel non trivial, et soit  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$  telle que pour tout  $t \in I$ , on a  $f(t) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$  et la famille  $(f(t), f'(t))$  est liée.

On pose alors  $g(t) = \frac{f(t)}{\|f(t)\|}$  pour tout  $t \in I$ ,  $\|\dots\|$  désignant la norme euclidienne.

1) Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et que pour tout  $t \in I$ , on a  $g'(t)$  à la fois colinéaire et orthogonal à  $g(t)$ .

2) En déduire que  $f(t)$  a une direction constante.

3) Chercher un contre-exemple, lorsqu'on n'a pas la condition  $\forall t \in I, f(t) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ .

**Exercice 7 :** Soit  $I$  un intervalle réel non trivial, et soit  $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^3)$  telle que pour tout  $t \in I$  les vecteurs  $f(t)$  et  $f''(t)$  sont colinéaires (on parle alors de mouvement à accélération centrale). On note  $\sigma(t) = f(t) \wedge f'(t)$ , pour  $t \in I$ .

1) Montrer que la fonction vectorielle  $\sigma$  ainsi définie est constante sur  $I$ .

2) Montrer que s'il existe  $t_0 \in I$  tel que la famille  $(f(t_0), f'(t_0))$  est libre, alors l'ensemble image  $f(I)$  est inclus dans un plan de  $\mathbb{R}^3$  (on dit alors que c'est un mouvement à trajectoire plane).

**Exercice 8 :** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point. On considère trois fonctions vectorielles  $f_1, f_2, f_3 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que pour tout  $t \in I$ , la famille  $\mathcal{B}_t := (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  est une base orthonormée directe (on suppose  $\mathbb{R}^3$  orienté par la base canonique). Soit  $M_t$  la matrice de la famille  $(f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t))$  dans la base  $\mathcal{B}_t$ .

1) Montrer que  $M_t$  est antisymétrique.

2) En déduire qu'il existe un vecteur  $\Omega(t)$  tel que  $f'_k(t) = \Omega(t) \wedge f_k(t)$  pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

3) On suppose que les  $(f_k)_{k \in \{1, 2, 3\}}$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$ . Prouver que la fonction  $t \mapsto \Omega(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et calculer  $f''_k$  en fonction de  $\Omega, \Omega'$  et  $f_k$  pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$ .

**Exercice 9 :** On considère une application  $M : t \mapsto M(t)$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , telle que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $M(t)^2 = M(0) = I_n$ .

1) Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $M(t)$  est diagonalisable.

2) Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$M(t)M'(t) = -M'(t)M(t) ; M'(t) = -M(t)M'(t)M(t).$$

3) Montrer que l'application  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\phi(t) = \text{tr}(M(t))$  est une fonction constante.

4) Déterminer toutes les applications  $M$ .