TSI2 Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques 2015/2016 - J. Aurouet

Feuille de TD 13

Exercice 1 : Équations d'ordre 1. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$(1+x^2)y' + 2xy = e^x + x.$$

Exercice 2 : Raccordements diverses. Déterminer les solutions maximales des équations différentielles suivantes sur un intervalle bien choisi. Puis étudier les raccordements éventuels.

a) $ty' - 2y = t^3$ **b)** $t^2y' - y = 0$

c) $(1-t)y' - y = t$ **d)** $\cos^2(t)y' - y = e^{\tan(t)}$

Exercice 3 : Équations d'ordre 2, autonomes. Déterminer la solution générale de chacune des équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 3y' + 2y = e^t$ **b)** $y'' + 2y' + y = te^t$

c) $y'' - y = -6\cos(t) + 2t\sin(t)$ **d)** $4y'' + 4y' + 5y = \sin(t)e^{-t/2}$

Exercice 4 : Méthode de Lagrange. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad (1+2x)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$$

1) Déterminer une soluion de la forme $y(x) = e^{\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
2) On pose alors $y(x) = e^{\alpha x}z(x)$. Quelle est alors l'équation différentielle vérifiée par z ?
3) En déduire les solutions de (E) sur $\left]-\frac{1}{2}\ ,\ +\infty\right[$.
4) Déterminer la solution qui vérifie $y(0) = 1$ et la tangente en $x = 0$ coupe l'axe Ox au point d'abscisse $x = 1$.

Exercice 5 : Solution développable en série entière et méthode de Lagrange. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \ x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$$

1) Déterminer une solution f de (E) développable en série entière. Préciser son rayon de convergence R et exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.
2) Vérifier que l'application $g : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
3) En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 6 : Changement de variable. Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide d'un changement de variable.

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{1}{(1+x^2)^2}y = 0 \quad ; \qquad (1-t)^2y'' - ty' + y = 0$$

Exercice 7 : Wronskien. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I :

a) $y'' + y = \tan^2(t), \quad I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ **b)** $t^2y'' - 2y = 3t^2, \quad I = \mathbb{R}$

Exercice 8 : Systèmes différentiels linéaires autonomes. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

a) $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$

Exercice 9 : Équations d'ordre supérieur.

1) Résoudre l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$:

$$(E) \;:\; y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y^{(2)} - 2y' + y = 0$$

2) Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'' + x' + 4y' - x - 3y = 0 \\ y'' - 3y' + x + 3y = 0 \end{cases}$$

Exercice 10 : Modélisation et application.

a) Triplement d'une population : L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnelle à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?
b) Dissolution d'un composé chimique : La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20g de ce composé, et on observe que 5 minutes plus tard, il reste 10g. Dans combien de temps restera-t-il seulement 1g ?
c) Recherche de courbe : Trouver les courbes d'équation $y = f(x)$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$. vérifiant la propriété géométrique suivante : si M est la point courant de la courbe, T l'intersection de la tangente à la courbe en M avec l'axe $(0x)$, et P le projeté orthogonal de M sur (Ox), alors 0 est le milieu de $[PT]$.