TSI2 | Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques | 2016/2017 - J. Aurouet

Feuille de TD 10

Exercice 1 : Rayons de convergence. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\textbf{a)}\ \sum \frac{sh^3(n)}{ch(n)} z^n,\quad \textbf{b)}\ \sum \frac{n^3+1}{n+4^n} z^{2n},\quad \textbf{c)}\ \sum \frac{2^{n(-1)^n}}{n} z^n$$

$$\textbf{d)}\ \sum a_n z^n,\quad \text{où } \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 3^n \text{ et } a_{2n+1} = \frac{1}{(n+1)^n}$$

Exercice 2 : Calculer une somme de série entière. Calculer les sommes des séres entières suivantes sur leur disque de convergence :

$$\textbf{a)}\ \sum n^2 z^n,\quad \textbf{b)}\ \sum \frac{2sh(n)}{n(n+1)} z^n,\quad \textbf{c)}\ \sum \frac{1}{2n+1} x^n \quad \text{pour } x > 0$$

$$\textbf{d)}\ \sum \frac{1}{(n(n+2)} x^n \quad \text{pour } x \in \mathbb{R},\qquad \textbf{e)}\ \sum \frac{\cos(\theta)}{n!} z^n \quad \text{pour } \theta \in \mathbb{R},$$

$$\textbf{f)}\ \sum \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Indication pour la dernière série :
Poser $a_{2n+1} = \frac{4^n n!^2}{(2n+1)!}$, établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n+1)a_{2n+1} - 2na_{2n-1} = 0$. En déduire la somme en résolvant une équation différentielle du premier ordre.

Exercice 3 : Développement en série entière. Montrer que les séries suivantes sont développables en série entière au voisinage de zéro.

$$\textbf{a)}\ f\ :\ x\ \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \\ 3 \ \text{ si } x \in \pi\mathbb{Z} \end{cases} \qquad \textbf{b)}\ f\ :\ x\ \mapsto\ \frac{4x+1}{4x^3-3x+1}$$

$$\textbf{c)}\ f\ :\ x\ \mapsto\ e^{\frac{-x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$$

Exercice 4 : Théorème des zéros isolés. Soit $\sum a_n z^z$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Soit f la somme de la série sur $]-R, R[$ et $a \in]-R, R[$. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]-R, R[^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a,\quad \text{et}\quad \forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = 0$$

Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 5 : Théorème de Liouville. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la somme de cette série entière.
a) Montrer que $\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ni\theta}d\theta$.
b) En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \frac{M}{r^n}$.
c) Montrer alors que si f est bornée sur $\mathbb{C}$ alors f est constante.