TSI2 Lycée Gustave Eiffel
Mathématiques 2016/2017 - J. Aurouet

Feuille de TD 1

Exercice 1 : Étudier la nature des suites de terme général :

1) $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$
2) $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ avec $a>0$ et $b>0$
3)$u_n = \frac{2^n-(-3)^n}{2^n+3^n}$
4) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
5) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$
6) $u_n = 1+\cos(n\pi)$

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1) On suppose que la suite (u_{2n}) et la suite (u_{2n+1}) convergent vers une même limite. Montrer que (u_n) converge.
2) On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{5n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3 : Lemme de Cesàro. Soit (u_n) une suite convergente de limite l. Pour tout n on pose

$$v_n = \frac{u_0+u_1+\cdots+u_n}{n}.$$

Montrer que (v_n) converge vers l.

Exercice 4 : Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, trouver une suite simple équivalente à (u_n) lorsque $n\to+\infty$.

1) $u_n = 2n^2-n+1$
2) $u_n = n^2-\sin(2n+1)$
3) $u_n = 2^n+n$
4) $u_n = 2^n+5^n$
5) $u_n = 3n^2+n!$
6) $u_n = n+e^n+\ln(n)$
7) $u_n = \sin(\frac{1}{n})-\ln(1+\frac{1}{n})$
8) $u_n = \sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}+3n-1$

Exercice 5 : Déterminer la limite éventuelle des suites de terme général u_n dans les cas suivants :

1) $u_n = \frac{n^2+\cos(n)}{2^n+\sin(n)}$
2) $u_n = \frac{\sqrt[3]{8n^3+1}-2n}{2^n+\sin(n)}$
3) $u_n = \frac{1000^n+n!}{n!+n^1000}$
4) $u_n = n(\cos(\frac{1}{n})-\ln(e+\frac{1}{n}))$
5) $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$
6) $u_n = \frac{\sqrt[3]{1+\sin(\frac{1}{n})}-e^{\frac{1}{3n}}}{\sin(\frac{1}{n})+\tan(\frac{1}{n})}$
7) $u_n = n\ln(n^2+1)-2n\ln(n)$
8) $u_n = \frac{n^n}{n!}$

Exercice 6 : Soit $z\in\mathbb{C}$. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n.$$

Exercice 7 : Étudier les suites définies par les termes généraux suivants :

1) $u_n = \prod_{k=0}^{n}(1+\frac{k}{n^2}),$ 2) $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

3) $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}\right) - n,$ 4) $u_n = \sum_{k=n}^{n^2}\frac{1}{k\ln(k)}$

Exercice 8 :

1) Étudier la suite telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et définie par :

$$u_{n+1} = \frac{4}{\pi}\arctan(u_n)$$

2) Que dire d'une suite réelle (u_n) qui vérifie :

$$\lim_{n\to+\infty} 2u_{n+1} + u_n = 0$$

Exercice 9 :

1) Montrer que les suites définies pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!n}$$

sont adjacentes.

2) Écrire une fonction Python permettant de calculer u_n en fonction de n.

3) Montrer que la limite l de la suite (u_n) est un nombre irrationnel.
Indications : On raisonnera par l'absurde en posant $l = \frac{p}{q}$, en encadrant l par u_q et v_q, puis en prouvant que $q!u_q$ est un nombre entier.

4) Écrire une fonction Python permettant de calculer une approximation de l à ε près, pour ε donnée en paramètre.

5) Montrer que $l = e$ en utilisant une formule de Taylor.