Chapitre 3
Réduction d'endomorphismes

Exercice 1 : On considère l'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = M + \mathrm{Tr}(M) \cdot \mathrm{I}_n.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 2 : Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe f'. Déterminer les éléments propres de D.

Exercice 3 : Soit u un automorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$\mathrm{Sp}(u^{-1}) = \left\{ \lambda^{-1} \in \mathbb{K} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \right\}.$$

Exercice 4 : Déterminer les valeurs propres dans $\mathbb{R}$ des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : On considère l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_3[X] \to \mathbb{C}_3[X]$ donné par

$$\forall P \in \mathbb{C}_3[X], \quad \varphi(P) = X^3 P(1/X).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de φ.
2. Donner les valeurs propres de φ et leur multiplicité.
3. Déterminer les espaces propres de φ. Est-ce que φ est diagonalisable ?

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère l'application u définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in E, \quad u(P) = P\left(\frac{X+1}{2}\right).$$

1. Justifier que u est un endomorphisme de E.
2. Montrer que sa matrice dans la base canonique est triangulaire supérieure.
3. En déduire les valeurs propres de u et leur multiplicité.
4. Calculer $u((X-1)^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire les espaces propres de u.

Exercice 7 : On considère les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
2. Déterminer les éléments propres de la matrice sur $\mathbb{R}$.
3. La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 8 : On considère les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & -1 & -1+2i \\ 2 & 3+i & 1-3i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
2. Déterminer les éléments propres de la matrice sur $\mathbb{C}$.
3. La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 9 : Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ m^2-7m & m-7 & m \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10 : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

La matrice R_θ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Exercice 11 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Diagonaliser la matrice A, puis en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Déterminer une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

Exercice 13 : Soit v un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = v$.

Exercice 14 : Diagonaliser la matrice $J = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15 : On considère les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que les matrices A et T sont semblables.

Exercice 16 : On considère les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les éléments propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que les matrices A et T sont semblables.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A^2) = \{\lambda^2 \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

Exercice 18 : Déterminer une expression de la suite (u_n) dans les cas suivants.

(i) $u_0 = 1, \quad u_1 = -1 \quad \text{et} \quad 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$

(ii) $u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$

(iii) $u_0 = 5, \quad u_1 = 6 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$

(iv) $u_0 = 5, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = -9u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$

(v) $u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$

(vi) $u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$