Chapitre 4
Fonctions vectorielles et courbes paramétrées

Exercice 1 : Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^2$ décrivant le déplacement d'un point. On suppose que f' et f'' ne s'annule pas sur I.

1. Montrer que le point se déplace à vitesse constante si et seulement si le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse sont orthogonaux.
2. Montrer que le point accélère si et seulement si l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[-\pi/2, \pi/2]$.
3. Montrer que le point décélère si et seulement si l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[\pi/2, 3\pi/2]$.

Exercice 2 (Wronskien) **:** Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère deux solutions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'' = ay' + by.$$

Montrer que la fonction $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$w(t) = \begin{vmatrix} f(t) & f'(t) \\ g(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 3 : Soit $u, v, w : [a, b] \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. On suppose

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ vérifiant

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 4 : Soit $f : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^2$ telle que le vecteur $f''(t) \in \mathrm{Vect}(f(t))$ pour tout $t \in I$.

1. Montrer que l'application $t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante.
2. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ ne sont pas colinéaires. Montrer que les valeurs prises par $f(t)$ sont contenues dans un plan.
3. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ sont colinéaires et que f ne s'annule pas. Montrer que les valeurs prises par $f(t)$ sont contenues dans une droite.

Exercice 5 : Calculer des développements limités à l'ordre 4 des fonctions vectorielles suivantes.

(i) $f(t) = ((1-t)^{-1}, (1+t)^{-1})$ en 0, (ii) $f(t) = (\exp(t), \cos(t))$ en 0,

(iii) $f(t) = (\sin^2(t), \sqrt{1-t^2})$ en 0, (iv) $f(t) = (e^{\sin(\pi t)}, t^4)$ en 1,

(v) $f(t) = (\sin(t)\exp(t), \sin^3(t))$ en π, (vi) $f(t) = (\ln^2(t), t^t)$ en 1.

Exercice 6 : Tracer la courbe paramétrée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}\right).$$

Exercice 7 (Lemniscate de Bernoulli) **:** Tracer la courbe paramétrée par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right).$$

Exercice 8 (Folium de Descartes) **:** Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right).$$

Exercice 9 (Courbe de Lissajous) **:** Tracer la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos(3t), \sin(2t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 : Tracer la courbe paramétrée par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (2\cos(2t), \sin(3t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 (Deltoïde) **:** Tracer la courbe paramétrée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) - \sin(2t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 : On considère la courbe paramétrée par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\exp(\sin(2t)), \exp(\cos(t)))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Tracer la courbe paramétrée par f.
2. Montrer que la courbe paramétrée par f admet un unique point double.
3. Donner une équation de chacune des tangentes à la courbe en ce point.

Exercice 13 : On considère la courbe paramétrée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = ((t-2)^3, t^2 - 4)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les points d'inflexions de la courbe.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en ces points.

Exercice 14 : On considère la courbe paramétrée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\exp(t), t^2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les points d'inflexions de la courbe.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en ces points.

Exercice 15 : Calculer la longueur de la courbe paramétrée par la fonction $f : [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ pour tout $t \in [0, 10\pi]$.

Exercice 16 : On considère la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \exp(t)$ pour tout $t \in [0,1]$. Calculer la longueur de la courbe représentative de h.

Exercice 17 : On considère la fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = t^{3/2}$. Calculer la longueur de la courbe représentative de h.

Exercice 18 (Cycloïde) **:** On considère la courbe paramétrée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Quelle transformation géométrique envoie le point $f(t)$ sur le point $f(t+2\pi)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$?
2. Tracer la courbe paramétrée par f.
3. Calculer la longueur de la courbe du point $f(0)$ au point $f(2\pi)$.

Exercice 19 (Astroïde) **:** On considère la courbe paramétrée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Tracer la courbe paramétrée par f.
2. Calculer la longueur de la courbe.

Exercice 20 (Cardioïde) **:** On considère la courbe paramétrée par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (2\cos(t) + \cos(2t), 2\sin(t) + \sin(2t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Tracer le courbe paramétrée par f.
2. Calculer la longueur de la courbe.