Chapitre 13
Équations différentielles

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$(i)\ 7y' + 2y = t, \qquad (ii)\ y' + 2y = t^2 - 2t + 3,$$
$$(iii)\ y' - 2y = \cos(t) + \sin(t), \qquad (iv)\ y' - (t+1)y = t+1,$$
$$(v)\ y' - 2ty = (1-2t)e^t, \qquad (vi)\ (1+t^2)y' - (t+1)y = 2.$$

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$(i)\ ty' - 2y = t^3, \qquad (ii)\ t^2y' - y = 0, \qquad (iii)\ ty' + y = 1.$$

Exercice 3 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x tf(t)dt + 1.$$

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$(i)\ y'' + 9y = 3e^{-t}, \qquad (ii)\ y'' - 4y' + 3y = e^t,$$
$$(iii)\ y'' - 2y' + y = 2e^t, \qquad (iv)\ y'' + 2y' + 2y = \sin(t),$$
$$(v)\ y'' - 3y' + 2y = \sin(2t), \qquad (vi)\ y'' - 2y' + 2y = e^t\cos(t).$$

Exercice 5 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+e^t)y'' + 2e^ty' + (2e^t+1)y = e^t. \qquad (E)$$

1. Soit y une solution de (E). Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifier par la fonction $z(t) = (1+e^t)y(t)$.
2. En déduire les solutions de (E).

Exercice 6 : On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0. \qquad (E)$$

1. Soit y une solution de (E). Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifier par la fonction $z(t) = y(e^t)$.
2. En déduire les solutions de (E) sur I.

Exercice 7 : Soit $a > 0$. On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' - a^2y = 0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions de (E) de la forme $y : x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t+1)^2y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0 \qquad (E).$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales solutions de (E).
2. En déduire les solutions de (E) sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t^2+1)y'' - 2y = 0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E).
2. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$t^2y'' + ty' - y = 1 \qquad (E).$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation homogène (H).
2. En déduire les solutions de (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation homogène (H).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : Résoudre les systèmes différentiels suivants.

$$(i) \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& 4x - 2y \\ y' &=& x + y \end{array} \right. \qquad (ii) \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& -x + 3y \\ y' &=& -2x + 4y \end{array} \right.$$

$$(iii) \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& x + 2y - z \\ y' &=& 2x + 4y - 2z \\ z' &=& -x - 2y + z \end{array} \right. \qquad (iv) \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& y + z \\ y' &=& -x + 2y + z \\ z' &=& x + z \end{array} \right.$$

$$(v) \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& x - 4y \\ y' &=& x - 3y \end{array} \right. \qquad (vi) \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& -x - y \\ y' &=& x - 3y \end{array} \right.$$

Exercice 15 : Déterminer les solutions réelles du système différentiel $X' = AX$ avec les matrices

$$(i) \;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (ii) \;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16 : Résoudre les systèmes différentiels suivants.

$$(i) \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& (2-t)x + (t-1)y \\ y' &=& 2(1-t)x + (2t-1)y \end{array} \right. \qquad (ii) \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& (t+3)x + 2y \\ y' &=& -4x + (t-3)y \end{array} \right.$$

Exercice 17 : En se ramenant à un système différentiel d'ordre 1, résoudre l'équation différentielle

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \qquad (E).$$