

Chapitre 15

Courbes et surfaces implicites

Exercice 1 : Soit $\mathcal{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x^2 - y^2 = 0$.

1. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
2. Déterminer les points singuliers de $\mathcal{C}$.

Exercice 2 : Soient $a, b > 0$. Soit $\mathcal{C}$ l'ellipse de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 3 : Soient $a, b > 0$. Soit $\mathcal{C}$ l'hyperbole de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 4 (Folium de Descartes) : Soit $\mathcal{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{C}$.
2. Donner en ces points une équation de la tangente à $\mathcal{C}$.

Exercice 5 : Tracer les lignes de niveaux et les gradients des applications

$$(i) \quad f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (ii) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{y}{x} \quad (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

Exercice 6 (Cône) : Soit $\mathcal{S}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{S}$.
2. Donner en ces points une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$.

Exercice 7 (Tore) : Soit $\mathcal{S}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0.$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathcal{S}$.
2. Donner une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $(3, 0, 0)$.

Exercice 8 : Soit $\mathcal{S}$ le graphe de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

On fixe un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. Déterminer la position locale de $\mathcal{S}$ par rapport à son plan tangent en M .

Exercice 9 : Soit $\mathcal{S}$ le graphe de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y) = \frac{y}{1 + x^2}.$$

1. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $O = (0, 0, 0)$.
2. Déterminer la position locale de $\mathcal{S}$ par rapport à son plan tangent en O .

Exercice 10 : Soit $\mathcal{S}$ le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y) = \ln(x) - \ln(y).$$

On fixe un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $M = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
2. Déterminer la position locale de $\mathcal{S}$ par rapport à son plan tangent en M .