Devoir surveillé n°04

2TSI. Mathématiques

Mercredi 14 février 2018. Durée : 4 heures

Les calculatrices ou portables ou autres documents sont prohibés.
Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 01

Posé à l'écrit de CCS, filière TSI

Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On effectue n lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec une probabilité $p \in]0,1[$ et face avec une probabilité $q = 1-p$. On fait n lancers successifs de la pièce. On introduit la notion de **séries de lancers** amenant un même côté et on parle de longueur d'une série. Ainsi la première série est de longueur $m \in [\![1, n-1]\!]$ si les m premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(m+1)^{\text{ème}}$ l'autre côté et de longueur n si les n lancers ont amené le même côté. Si la longueur de la première série est égale à $m < n$, la deuxième série commence au $(m+1)^{\text{ème}}$ lancer et ainsi de suite. Ω_n désigne l'ensemble des successions de pile ou de face au bout de n lancers. Pour $i \in \mathbf{N}^\star$, on note P_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ lancer amène pile » et F_i l'événement contraire. Enfin, $k \in \mathbf{N}^\star$.

1. On note L_1 la *v.a.r* donnant la longueur de la première série.
   (a) Déterminer $L_1(\Omega_n)$.
   (b) On suppose $m < n$. Exprimer $(L_1 = m)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, m+1]\!]$. En déduire $P(L_1 = m)$.
   (c) Exprimer $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, n]\!]$.
   En déduire $P(L_1 = n)$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} P(L_1 = m) = 1$.
2. On note L_2 la longueur de la deuxième série, s'il y en a une, et on note $L_2 = 0$ sinon.
   (a) Déterminer $L_2(\Omega_n)$.
   (b) On suppose que $m + k < n$. Exprimer $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, m+k+1]\!]$. En déduire $P((L_1 = m) \cap (L_2 = k))$.
   (c) On suppose que $m + k = n$. Exprimer $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour $i \in [\![1, n]\!]$. En déduire $P((L_1 = m) \cap (L_2 = k))$.
   (d) En déduire la valeur de $P(L_2 = k)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. Calculer $P(L_2 = 0)$.

Exercice 02

On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ (1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0.$$

1. Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières
$$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n t^n,\ \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n t^{2n} \text{ et } \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n t^{2n+1}.$$
2. On cherche une solution de (E) développable en série entière, donc de la forme $y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, où $t \in]-R, R[$, R étant le rayon de cette série entière que l'on ne peut pas encore expliciter.
   Déterminer une relation entre a_{n+2} et a_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. En déduire toutes les solutions développables en série entière de (E) puis toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

T.S.V.P →

Exercice 03

Dans le plan euclidien rapporté à la base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère un triangle non aplati ABC. On suppose $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$.

1. **Prémisse 1**. Déterminer le vecteur gradient de $f : M \mapsto \|\overrightarrow{AM}\|^2$.
2. **Prémisse 2**. Déterminer le vecteur gradient de $g : M \mapsto \|\overrightarrow{AM}\|$.
3. **Prémisse 3**. Montrer qu'il existe un seul point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
   On dit que G est **l'isobarycentre (ou le centre de gravité)** des points A, B et C.
4. **Prémisse 4**. Soient trois vecteurs unitaires (donc de norme 1) $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ tels que $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0}$.
   (a) Justifier qu'il existe $(x_1, x_2, x_3) \in ([0, 2\pi[)^3$ tel que les affixes de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ soient respectivement e^{ix_1}, e^{ix_2} et e^{ix_3}. Calculer $e^{ix_1} + e^{ix_2} + e^{ix_3}$.
   (b) Calculer $\cos(x_2 - x_1) + \cos(x_3 - x_1)$ et $\sin(x_2 - x_1) + \sin(x_3 - x_1)$.
   (c) En déduire que $\cos(x_2 - x_1) = -\dfrac{1}{2}$. Que peut-on dire de $\cos(x_3 - x_2)$ et de $\cos(x_3 - x_1)$?
   (d) Que peut-on dire pour les trois angles de vecteurs que forment $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$?
   (e) Réciproquement, soient trois vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ tels que :
   $$\forall (i,j) \in ([\![1,3]\!])^2,\ \vec{e}_i.\vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ -\frac{1}{2} & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}.$$
   Développer $\|\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\|^2$ en utilisant les produits scalaires des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.
   Que vaut $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$?
5. Déterminer le vecteur gradient de $\psi_1 : M \mapsto \|\overrightarrow{AM}\|^2 + \|\overrightarrow{BM}\|^2 + \|\overrightarrow{CM}\|^2$.
   En déduire l'unique point critique, noté G, de ψ_1 sous la forme d'une relation vectorielle avec A, B et C. Montrer que G correspond à un minimum.
6. Déterminer le vecteur gradient de $\psi_2 : M \mapsto \|\overrightarrow{AM}\| + \|\overrightarrow{BM}\| + \|\overrightarrow{CM}\|$.
   En déduire l'unique point critique, noté N, de ψ_2 sous la forme d'une relation vectorielle avec A, B et C. Que valent des mesures des angles entre $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{NB}$ et $\overrightarrow{NC}$?
   On dit que N est **le point de Pierre de Fermat** du triangle (ABC). Les germanophones l'appelent **der Punkt von Jakob Steiner** et les latins l'appelent **il punto di Evanlegista Torricelli**.
   Vérifier que N correspond à un minimum.
7. Déterminer les extremums de $\psi_3 : M \mapsto \|\overrightarrow{AM}\|.\|\overrightarrow{BM}\|.\|\overrightarrow{CM}\|$.
   Donner leur nature (minimum ou maximum) ?