Devoir libre 06

2TSI. Mathématiques

À rendre le 11 janvier 2018 au plus tard

Les deux exercices sont indépendants, le premier utilisant l'outil Python.

Exercice 01 (avec Python)

Inspiré des oraux de CCS Maths II
Le but est de revoir la méthode d'Euler pour les équations différentielles d'ordre 1 et de l'adapter aux systèmes différentiels. On pourra parcourir le whoswho de Python et en particulier les trois méthodes liées aux équations différentielles.

Partie A

On s'intéresse à l'équation différentielle : $y'(t) = t^2 - y^2(t)$, avec $y(1.5) = a$.

1. Rappeler la méthode de résolution numérique d'Euler pour résoudre une équation différentielle du premier ordre $y'(t) = f(y(t), t)$ avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$ et qui permette d'avoir une valeur approchée de la courbe intégrale pour $t \in [t_0, t_1]$.
2. Écrire une procédure $EULER$ en langage Python qui permette de calculer et tracer une équation différentielle du type de la question **1)**.
   On suppose $a = 2$. Tracer trois représentations de y pour $t \in [1.5, 2.5]$: en utilisant la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{4}$ puis $h = \frac{1}{8}$ et en utilisant la fonction *odeint*.
   (On représentera ces trois courbes sur la même dessin.)
3. Faire de même avec $a = 1$. Que remarque t-on ?

Partie B

On considère maintenant pour $n \in \mathbb{N}$, $(E_n)\ :\ y''(t) - 11\,y'(t) + 28\,y(t) = \sin(nt)$, dont les conditions initiales sont $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. On suppose $n = 0$. Résoudre (sans Python) (E_0) de deux manières :
   (a) directement d'une part, en utilisant l'équation caractéristique ;
   (b) en utilisant un système différentiel d'ordre 1 associé d'autre part.
2. Résoudre l'équation générale (E_n) sans PYTHON (avec la méthode de l'équation caractéristique).
3. Résoudre (E_n) avec PYTHON en utilisant le module *sympy* (voir le Whoswho).
4. Représenter le graphe des solutions pour $n \in [\![1, 10]\!]$ et $t \in [0, 0.5]$, en utilisant le module prédéfini de Python *scipy.integrate as integr*.
   Indication : *on mettra (E_n) sous forme d'un système différentiel puis on définira une fonction Python $F(x,t,n)$ sous forme d'un array, où $x[0]$ et $x[1]$ sont les fonctions du système différentiel. Voir le Whoswho pour des exemples. Puis on traduit $t \in [0, 0.5]$ en Python par une variable T utilisant np.linspace. Les solutions $x[0]$ et $x[1]$ du système sont alors donnés par :*
   $X = integr.odeint(F, np.array([0, 1]), T, (n,\ ))$
   (dans une boucle indexée par n). Il reste à faire plot en affichant T en abscisse et $X[:, 0]$ en ordonné.

T.S.V.P →

Exercice 02

D'après l'écrit de Maths I CCP en 2005

1. Vérifier que :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$$
est convergente.
On admet dans la suite que $I = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Calculer l'intégrale :
$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(a\,u)}{u}\, du,$$
où a est un réel fixé.
3. (a) Justifier la convergence de l'intégrale :
$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du.$$
   (b) Calculer J.
4. On considère :
$$K(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(a\,u)\sin(b\,u)}{u^2}\, du,$$
où a et b sont des réels.
   (a) Exprimer $K(a,b)$ à l'aide de $I(a+b)$ et de $I(a-b)$.
   (b) En déduire les valeurs de $K(a,b)$ en distinguant les différentes régions du plan (Oa,Ob).
   (c) Donner une expression de $K(a,b)$ regroupant les différents cas.