Devoir surveillé n°02

2TSI. Mathématiques

Samedi 18 novembre 2017. Durée : 4 heures

Les calculatrices ou portables ou autres documents sont prohibés.
Les trois exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 01

Inspiré de l'écrit CCP filière PC en 2015

Ici $n \geqslant 2$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A^T désigne la transposée de A.
Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $L_i(A)$ désigne la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et $C_j(A)$ désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Enfin, $A_{i,j}$ désigne $L_i(A) \cap C_j(A)$. On note :

$$\mathcal{B}_n = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_{i,j} \in \{-1,1\}\right\},$$

$$\mathcal{G}_n = \{A \in \mathcal{B}_n,\ A \text{ est inversible }\},\ \mathcal{H}_n = \left\{A \in \mathcal{B}_n,\ A^T A = nI_n\right\}.$$

1. Donner deux matrices A_2 et A'_2 de $\mathcal{B}_2$, telles que $A_2 \in \mathcal{H}_2$ et $A'_2 \notin \mathcal{G}_2$.
2. On pose $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. A_3 est-t-elle dans $\mathcal{B}_3$?, dans $\mathcal{G}_3$?, dans $\mathcal{H}_3$?
3. On pose $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $S = \dfrac{1}{2}A_4$. Enfin, ϕ est l'endomorphisme canoniquement associé à S.
   (a) Calculer $\mathsf{Det}\ (A_4)$, avec des opérations élémentaires et éventuellement un développement selon une rangée.
   (b) Montrer que $A_4 \in \mathcal{H}_4$. Retrouver $\mathsf{Det}\ (A_4)$.
   (c) Montrer que ϕ est une symétrie vectorielle. Déterminer alors une base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et une base de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$.
   (d) Montrer que Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
   (e) Écrire la matrice de ϕ dans la base de $\mathbb{R}^4$, réunion de la base de Ker $(\phi - Id_{\mathbb{R}^4})$ et celle de Ker $(\phi + Id_{\mathbb{R}^4})$ trouvées à la question **3)c)**. Que remarque-t-on ?
4. Vérifier que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{B}_n$ et que $\mathcal{B}_n$ est de cardinal fini à déterminer.
5. Soit $A \in \mathcal{G}_n$. On transforme A en A' par les $n-1$ opérations élémentaires :
$$\forall i \in [\![2,n]\!],\ L_i(A) \leftarrow A_{1,1}L_i(A) - A_{i,1}L_1(A).$$
   (a) Trouver une relation entre $\mathsf{Det}\,(A)$ et $\mathsf{Det}\ (A')$.
   (b) Montrer que $A' = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, où $B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est inversible et que pour tout $(i,j) \in [\![1,n-1]\!]^2$, $B'_{i,j} \in \{-2,0,2\}$.
   (c) Montrer que $\mathsf{Det}\,(A)$ est un multiple de 2^{n-1}.
   (d) Si $A \in \mathcal{H}_n$ et $n \geqslant 3$, montrer que $|\mathsf{Det}\,(A)| = n^{\frac{n}{2}}$ et en déduire que n est un multiple de 4.

Exercice 02

Extrait de l'écrit, épreuve de Maths II du Concours National Commun Marocain pour la filière TSI

Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout n-uplet $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note $V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ la **matrice de Vandermonde** définie par :

$$V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

On note $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)|$ le déterminant de $V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
C'est le **déterminant de Vandermonde** du n-uplet $(x_1, x_2..., x_n)$.

1. Si les scalaires $x_1, x_2, ..., x_n$ ne sont pas toujours distincts, justifier que $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = 0$.
2. Calculer $|V_2(x_1, x_2)|$.
   Dans la suite, **on suppose** $n \geqslant 3$ **et les scalaires** $x_1, x_2, ..., x_n$ **sont deux à deux distincts**.
3. On note F la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par : $F(x) = |V_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x)|$.
   (a) Montrer que la fonction F est polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   Préciser le coefficient de son terme de plus haut degré.
   Indication : on pourra développer le déterminant en question par rapport à une colonne bien choisie.
   (b) En utilisant les propriétés des déterminants, montrer que les scalaires $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ sont des racines de F.
   (c) En déduire que : $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = |V_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})| \prod_{k=1}^{n-1} (x_n - x_k)$.
4. Montrer alors que : $|V_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)| = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.
5. Justifier que la matrice $V_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ est inversible.
6. **Une application** : soient a, b, c trois réels deux à deux distincts.
   Montrer en utilisant $F(x) = |V_4(a, b, c, x)|$, (avec $x \in \mathbb{R}$) que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 2a \\ a^3 & b^3 & c^3 & 3a^2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-c)^2(c-b).$$

Exercice 03

Extrait de l'écrit du Concours E3A en 2016 pour la filière PSI

Pour tout entier naturel n, on note $e_n : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^n e^{-x}$.
Soient $N \in \mathbf{N}^\star$ et E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, défini par $E = \mathsf{Vect}(e_0, e_1, ..., e_N)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_N)$ est une base de E. En déduire la dimension de E.
2. Pour tout $g \in E$, on note : $\Delta(g) = g'$.
   (a) Démontrer que Δ est un endomorphisme de E.
   (b) Écrire la matrice A de Δ dans la base $\mathcal{B}$. Δ est-il un automorphisme de E ?
   (c) Déterminer les valeurs propres de Δ et des vecteurs propres associés.
   L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?