Devoir surveillé n°01

2TSI. Mathématiques

Samedi 30 septembre 2017. Durée : 4 heures

Les calculatrices ou portables ou autres documents sont prohibés.
Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 01

Posé à l'oral du Concours Banque PT en 2016

On considère $f : z \mapsto \dfrac{z}{z+2}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer.
2. Déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ et déterminer tous les complexes z tels que $f(z) \in i\,\mathbb{R}$.
3. Trouver une relation entre les modules de $f(z) - 1$ et de $z + 2$, puis trouver une relation entre les arguments de ces deux expressions.
4. On note C l'ensemble des points du plan situés à une distance $R > 0$ de A d'affixe -2. Déterminer l'image de C par f.

Exercice 02

Extrait de l'écrit des Concours Communs Polytechniques en 2016 pour la filière TPC

On considère deux fonctions, notées ch et sh, définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. On étudie ici ch et sh.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2\,(x) - \mathrm{sh}^2\,(x) = 1$.
   (b) Déterminer les dérivées de ch et de sh en fonction d'elles-mêmes et étudier les variations de ces deux fonctions.
2. On pose dans cette question : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}\,(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)}$.
   (a) Montrer que th est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On précisera ses limites en $\pm\infty$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)$.
   (c) Vérifier que th est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}^{(n+1)}(x)$ en fonction des dérivées successives $\mathrm{th}^{(k)}(x)$ pour k variant de 0 à n.
   (e) On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{\mathrm{th}^{(k)}(0)}{k!}$. Montrer :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$
   (f) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{th}^{(2n)}(0)$. Que vaut alors a_{2n} ?

Exercice 03

Extrait de l'écrit des Concours Communs Polytechniques en 2016 pour la filière TSI

On considère ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0,1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. On désire ici encadrer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.
   (b) En déduire que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Justifier alors, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie.
   (c) En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.
   (d) En déduire alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2. On étudie ici la fonction f.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant x$.
   (c) Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0,1]$.
   (d) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
3. On étudie ici la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|1 - u_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}} |1 - u_n|$.
   (b) En déduire alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 04

Posé à l'oral des Concours Communs Polytechniques en 2016 pour la filière PSI

Dans une question de cet exercice, on écrira un programme en langage Python.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $e^x = nx$ admet deux solutions vérifiant :
$$0 \leqslant x_n < y_n.$$
2. Écrire une fonction Python qui prend n pour argument et qui renvoie sous forme d'un couple des valeurs approchées de x_n et de y_n.
3. Étudier la monotonie des deux suites $(x_n)_{n\geqslant 3}$ et $(y_n)_{n\geqslant 3}$.
   En déduire leurs limites.
4. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.
5. Trouver un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de x_n.
6. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $y_n \leqslant (1+\epsilon)\ln n$.