Sommaire

1. Fonction vectorielle d'une variable réelle

1.1. Application vectorielle et applications coordonnées

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}^2$, ou $\mathbb{R}^3$.

On note $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, ou, $F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}$, les f_i étant appelées les applications coordonnées.

On dit que F est définie sur I si et seulement si f_1, f_2, ou f_1, f_2, f_3 sont définies sur I.

1.2. Continuité

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}^2$, ou $\mathbb{R}^3$.
On dit que F est continue sur I si et seulement si f_1, f_2, ou f_1, f_2, f_3 sont continues sur I.

Remarque : On pourra ainsi utiliser les théorèmes usuels de continuité pour les applications de I dans $\mathbb{R}$.

1.3. Dérivabilité, classe $\mathscr{C}^k$

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}^2$, ou $\mathbb{R}^3$.
On dit que F est dérivable sur I si et seulement si f_1, f_2, ou f_1, f_2, f_3 sont dérivables sur I.

De plus, on définit F' par : $F'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \end{pmatrix}$, ou, $F'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ f_3'(x) \end{pmatrix}$

> Tout se passe donc, en fait, application coordonnée par application coordonnée !

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}^2$, ou $\mathbb{R}^3$.
On dit que F est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si et seulement si f_1, f_2, ou f_1, f_2, f_3 sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

De plus, $F^{(k)}$ est alors naturellement défini par : $F^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} f_1^{(k)}(x) \\ f_2^{(k)}(x) \end{pmatrix}$, ou, $F^{(k)}(x) = \begin{pmatrix} f_1^{(k)}(x) \\ f_2^{(k)}(x) \\ f_3^{(k)}(x) \end{pmatrix}$

Théorème : L'ensemble E des applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, à valeur dans $\mathbb{R}^n$, munies de la somme des applications et du produit d'une application par un scalaire, a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Démonstration : On écrit la démonstration pour $n = 2$.
E est non vide, il contient par exemple la fonction vectorielle nulle.
Il est stable par combinaison linéaire car

$$\forall x \in \mathrm{I},\ (\lambda \mathrm{F}(x) + \mu \mathrm{G}(x))^{(k)} = \left(\lambda \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}\right)^{(k)} = \begin{pmatrix} \lambda f_1(x) + \mu g_1(x) \\ \lambda f_2(x) + \mu g_2(x) \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} \lambda f_1^{(k)}(x) + \mu g_1^{(k)}(x) \\ \lambda f_2^{(k)}(x) + \mu g_2^{(k)}(x) \end{pmatrix}$$

Ceci prouve bien que si F et G sont de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, il en est de même pour $\lambda \mathrm{F} + \mu \mathrm{G}$. ■

1.4. Vecteurs vitesse et accélération

On utilise souvent t comme paramètre car celui-ci représente habituellement le « temps ».
On a alors :

- pour une courbe de classe $\mathscr{C}^1$, le vecteur $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ est appelé le vecteur « vitesse » à l'instant t ;
- pour une courbe de classe $\mathscr{C}^2$, le vecteur $\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ est lui, le vecteur « accélération » à l'instant t.

2. Propriétés

2.1. Formule de Taylor-Young et développement limité

Définition : On dit que F admet un développement limité à l'ordre n en x_0
$\Leftrightarrow$ chacune des p coordonnées de F admet un développement limité à l'ordre n en x_0.

Théorème : F de classe $\mathscr{C}^k$ au voisinage de x_0 admet un développement limité d'ordre k au voisinage de x_0. De plus, on a

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!}\mathrm{F}'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\mathrm{F}''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^k}{k!}\mathrm{F}^{(k)}(x_0) + (x - x_0)^k \,\varepsilon(x - x_0)$$

avec $\varepsilon(x - x_0) \to 0$ quand $x \to x_0$

On notera que F, F$'$, …, $\mathrm{F}^{(k)}$ et ε sont des fonctions **vectorielles**. Cette formule s'appelle encore formule de Taylor-Young à l'ordre k.
Démonstration : F est de classe $\mathscr{C}^k$ au voisinage de x_0, d'où chaque f_i est de classe $\mathscr{C}^k$ au voisinage de x_0. Chaque f_i admet donc un dl_k au voisinage de x_0 et enfin F admet un dl_k au voisinage de x_0. ■

2.2. Dérivée d'une fonction du type : $x \to \lambda(x)\,\mathrm{F}(x)$

Théorème :
Soit $\lambda : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{F} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^m$ une fonction scalaire et une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
Alors $\mathrm{G} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{I} & \to & \mathbb{R}^m \\ x & \mapsto & \lambda(x)\,\mathrm{F}(x) \end{array} \right.$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
De plus, on a la formule de Leibniz :

$$(\lambda \mathrm{F})^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{(i)}\ \mathrm{F}^{(k-i)}$$

avec la convention habituelle $\lambda^{(0)} = \lambda$ et $\mathrm{F}^{(0)} = \mathrm{F}$.

Démonstration :
On applique les théorèmes correspondants à chacune des coordonnées : $x \to \lambda(x)\,f_j(x)$. ■

Dans le cas d'une dérivée première, on a : $(\lambda(x)\,F(x))' = \lambda'(x)\,F(x) + \lambda(x)\,F'(x)$.

2.3. Dérivée d'un produit scalaire

Le principe est simple, un produit scalaire se dérive comme un produit !

Théorème : Soit $F, G : I \to \mathbb{R}^m$, deux fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Soit $s : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) \cdot G(x) \end{array} \right.$

Alors s est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

$$s^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} F^{(i)}(x) \cdot G^{(k-i)}(x)$$

Dans le cas d'une dérivée première, on a : $s'(x) = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x)$.

Démonstration : On vérifie la formule pour s'. Ensuite, il suffit de procéder par récurrence, comme on l'a fait lors de la démonstration de la formule de Leibniz pour les fonctions à valeur réelle.

$$\begin{aligned} s(x) &= f_1(x)\,g_1(x) + f_2(x)\,g_2(x) + \cdots + f_m(x)\,g_m(x) \\ s'(x) &= f_1'(x)\,g_1(x) + f_1(x)\,g_1'(x) + f_2'(x)\,g_2(x) + f_2(x)\,g_2'(x) + \cdots + f_m'(x)\,g_m(x) + f_m(x)\,g_m'(x) \\ &= \left(f_1'(x)\,g_1(x) + \cdots + f_m'(x)\,g_m(x)\right) + \left(f_1(x)\,g_1'(x) + \cdots + f_m(x)\,g_m'(x)\right) \\ &= F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x) \end{aligned}$$

■

2.4. Dérivée d'un produit vectoriel

Le principe est encore le même, un produit vectoriel se dérive comme un produit !

Théorème : Soit $F, G : I \to \mathbb{R}^3$, deux fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

Soit $V : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ x & \mapsto & F(x) \wedge G(x) \end{array} \right.$ Alors V est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

$$V^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} F^{(i)}(x) \wedge G^{(k-i)}(x)$$

Dans le cas d'une dérivée première, on a : $V'(x) = F'(x) \wedge G(x) + F(x) \wedge G'(x)$.

Démonstration : On vérifie la formule pour V', en effectuant le calcul sur chacune des coordonnées, ce qui ne pose aucun problème. Ensuite, il suffirait de procéder par récurrence pour obtenir la formule de Leibniz.

On pose : $F(x) = \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \\ c(x) \end{pmatrix}$, et aussi : $G(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \\ \gamma(x) \end{pmatrix}$.

On a donc : $V(x) = \begin{pmatrix} b(x)\gamma(x) - c(x)\beta(x) \\ c(x)\alpha(x) - a(x)\gamma(x) \\ a(x)\beta(x) - b(x)\alpha(x) \end{pmatrix}$.

Ce qui donne : $V'(x) = \begin{pmatrix} b'(x)\gamma(x) + b(x)\gamma'(x) - c'(x)\beta(x) - c(x)\beta'(x) \\ c'(x)\alpha(x) + c(x)\alpha'(x) - a'(x)\gamma(x) - a(x)\gamma'(x) \\ a'(x)\beta(x) + a(x)\beta'(x) - b'(x)\alpha(x) - b(x)\alpha'(x) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} b'(x)\gamma(x) - c'(x)\beta(x) \\ c'(x)\alpha(x) - a'(x)\gamma(x) \\ a'(x)\beta(x) - b'(x)\alpha(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b(x)\gamma'(x) - c(x)\beta'(x) \\ c(x)\alpha'(x) - a(x)\gamma'(x) \\ a(x)\beta'(x) - b(x)\alpha'(x) \end{pmatrix} = F'(x) \wedge G(x) + F(x) \wedge G'(x).$$ ■

> En résumé, dans tous les cas, un produit se dérive comme un produit.

2.5. Dérivation d'un déterminant

On donne d'abord le théorème en dimension 2.

Théorème : Soit $\Delta(t) = \det\left(\overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{v(t)}\right)$, avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dérivables sur un intervalle I.

Alors Δ est dérivable sur I, et, $\Delta'(t) = \det\left(\overrightarrow{u'(t)}, \overrightarrow{v(t)}\right) + \det\left(\overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{v'(t)}\right)$.

Démonstration : Il suffit de dériver : $\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_u(t) & x_v(t) \\ y_u(t) & y_v(t) \end{vmatrix} = x_u(t)y_v(t) - y_u(t)x_v(t)$

On obtient :
$\Delta'(t) = x'_u(t)y_v(t) + x_u(t)y'_v(t) - y'_u(t)x_v(t) - y_u(t)x'_v(t)$
$= x'_u(t)y_v(t) - y'_u(t)x_v(t) + x_u(t)y'_v(t) - y_u(t)x'_v(t) = \begin{vmatrix} x'_u(t) & x_v(t) \\ y'_u(t) & y_v(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_u(t) & x'_v(t) \\ y_u(t) & y'_v(t) \end{vmatrix}$ ■

> La dérivée d'un déterminant fonctionne aussi comme la dérivée d'un produit de fonctions vectorielles.

Donnons maintenant le théorème en dimension 3.

Théorème : Soit $\Delta(t) = \det\left(\overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{v(t)}, \overrightarrow{w(t)}\right)$, avec $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ dérivables sur un intervalle I.
Alors Δ est dérivable sur I, et,
$\Delta'(t) = \det\left(\overrightarrow{u'(t)}, \overrightarrow{v(t)}, \overrightarrow{w(t)}\right) + \det\left(\overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{v'(t)}, \overrightarrow{w(t)}\right) + \det\left(\overrightarrow{u(t)}, \overrightarrow{v(t)}, \overrightarrow{w'(t)}\right)$.

Démonstration : Le principe est le même que la démonstration précédente. C'est juste 3 fois plus long à écrire... ■