Sommaire

1. Espace Vectoriel Normé $\mathbb{R}^m$

1.1. Norme et distance associée

En pratique, on n'utilisera que la norme euclidienne et sa distance associée.

Définition :

$$\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & \|u\| \end{array}\right. \text{ est une } \mathbf{norme} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \forall u, v \in E, & \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| & \text{(inégalité triangulaire)} \\ \forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, & \|\lambda . u\| = |\lambda|\, \|u\| & \text{(positive homogénéité)} \\ & \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 & \text{(séparation)} \end{array}\right.$$

La norme d'un vecteur u est souvent notée $\|u\|$

> Même si on n'utilise ici que **la** norme euclidienne, il y a une infinité de normes différentes...

Exemple :
$\mathbb{R}^m$ a une structure euclidienne canonique, et si $u = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2}$$

cette norme est appelée norme euclidienne. Sauf mention contraire, c'est elle qu'on utilise.

Définition :

$$d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+ \text{ est une } \mathbf{distance} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} d(u,v) = d(v,u) & \text{(symétrie)} \\ d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w) & \text{(inégalité triangulaire)} \\ d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v & \text{(séparation)} \end{array}\right.$$

Théorème : $d(u,v) = \|v-u\|$ est une distance, appelée distance euclidienne de u à v.

Démonstration :
$u - v = -(v-u)$ prouve la symétrie.
$w - u = (w-v) + (v-u)$ prouve l'inégalité triangulaire.
La séparation de la norme prouve enfin la séparation de la distance associée. ■

Encore une fois, sauf mention contraire, on n'utilise que la distance induite par la norme euclidienne. Signalons que dans tout le reste du chapitre, on a souvent préféré la notion de norme, plus habituelle. Cependant, on peut remplacer, dans les expressions en ε, les normes par les distances correspondantes.

1.2. Boules, parties bornées, parties ouvertes ou fermées

Définition : Une **boule ouverte** de centre u_0 et de rayon r est :

$$\mathrm{B_O}\left(u_0, r\right) = \{v \in \mathbb{R}^m, \quad d\left(u_0, v\right) < r\}$$

Si, de plus, on ajoute la condition $v \neq u_0$, on parle de boule ouverte **étoilée**, notée B^*_O.

Définition : Une **boule fermée** de centre u_0 et de rayon r est :

$$\mathrm{B_F}\left(u_0, r\right) = \{v \in \mathbb{R}^m, \quad d\left(u_0, v\right) \leqslant r\}$$

Définition : Une **partie bornée** de $\mathbb{R}^m$ est une partie de $\mathbb{R}^m$ incluse dans une certaine boule (ouverte ou fermée).

Définition : Une **partie ouverte** ou un **ouvert** de $\mathbb{R}^m$ est une partie A telle que

$$\forall u \in \mathrm{A}, \quad \exists\, r > 0, \quad \mathrm{B_O}\left(u, r\right) \subset \mathrm{A}$$

C'est à dire que tout point de A est le centre d'une boule ouverte, de rayon non nul, complètement incluse dans A.

Définition : Une **partie fermée** ou un **fermé** de $\mathbb{R}^m$ est une partie telle que son complémentaire A soit un ouvert.

> Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé.
> $\mathbb{R}^m$ et $\emptyset$ sont ouverts et fermés.

1.3. Intérieur, frontière, extérieur

Dans ce paragraphe, A est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ et on a $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

Définition : u_0 est un point **intérieur** de A $\Leftrightarrow \exists r > 0$ tel que $\mathrm{B_O}\left(u_0, r\right) \subset \mathrm{A}$
L'ensemble de ces points est **l'intérieur** de A

Définition : u_0 est un point **extérieur** de A $\Leftrightarrow \exists r > 0$ tel que $\mathrm{B_O}\left(u_0, r\right) \cap \mathrm{A} = \emptyset$
L'ensemble de ces points est **l'extérieur** de A

Définition : u_0 est un point **adhérent** à A $\Leftrightarrow \forall r > 0,\ \mathrm{B_O}\left(u_0, r\right) \cap \mathrm{A} \neq \emptyset$
L'ensemble de ces points est **l'adhérence** de A

> Tous les points de A sont adhérents à A

Définition : u_0 est un point **frontière** de A $\Leftrightarrow$ u_0 est adhérent à A mais n'est pas dans son intérieur.
L'ensemble de ces points est **la frontière**, ou le **bord**, de A

Exemple : $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ ont pour
- adhérence : $[a, b]$;
- intérieur : $]a, b[$;
- frontière : $\{a, b\}$.

Théorème : L'ensemble des points adhérents de A, son **adhérence**, est formé de :
- l'ensemble de ses points intérieurs, son **intérieur**,
- et de l'ensemble des points frontières, sa **frontière**, aussi appelé son **bord**.

Démonstration : La définition des points frontières permet de conclure ! ■

Regardons ce que cela donne sur un autre exemple.

Le domaine A est constitué :
- d'un disque, une boule ouverte ou fermée, ça ne changera pas la suite ;
- d'un cercle ;
- et d'un point.

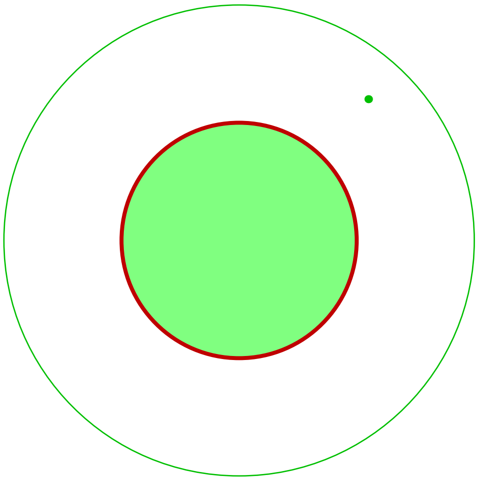

Fig. 1. le domaine A

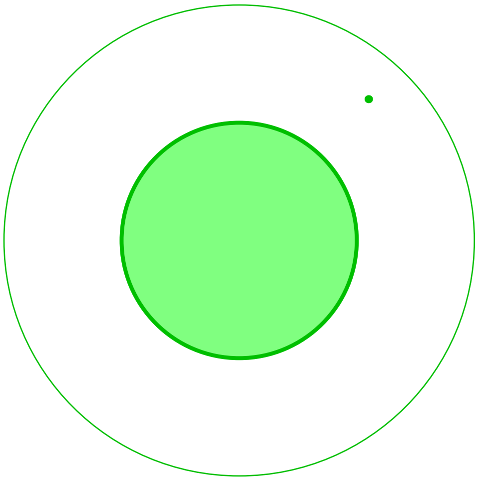

Fig. 2. l'adhérence de A

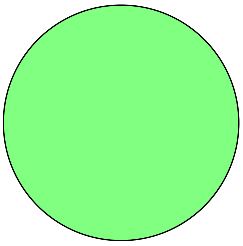

Fig. 3. l'intérieur de A

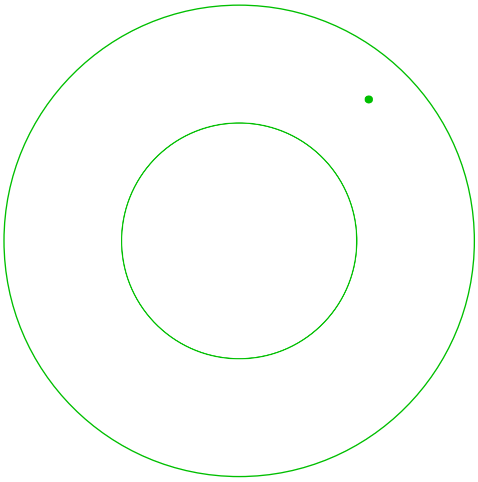

Fig. 4. la frontière de A

On voit donc :

Fig. 1. le domaine A, la boule est ouverte ou fermée, avec ou sans les points rouges ;

Fig. 2. l'adhérence de A, ici la boule est fermée, ave le tour vert foncé ;

Fig. 3. l'intérieur de A, simplement la boule ouverte ;

Fig. 4. la frontière de A, les deux cercles et le point.

2. Applications de A non vide, $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

2.1. Limite et continuité en un point

Soit $f \in \mathscr{A}(\mathrm{A}, \mathbb{R})$, $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p$, non vide. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^p$, un point adhérent de A.
Si, de plus, $u_0 \in \mathrm{A}$, on pourra s'intéresser à la continuité en un tel point.

Définition : Dans les conditions précédentes, on définit la **limite** de f en u_0 par :

$$\lim_{u \to u_0} f(u) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, r > 0, \quad \forall u \in A, \quad u \neq u_0, \\ d(u, u_0) \leqslant r \Rightarrow |f(u) - l| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Définition : Dans ces mêmes conditions, on dit que f est **continue** en $u_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = f(u_0)$.

2.2. Applications continues sur A non vide, $A \subset \mathbb{R}^p$, à valeur dans $\mathbb{R}$

Définition : On dit que f est **continue** sur A $\Leftrightarrow f$ est continue en tout vecteur u_0 de A.

L'ensemble des applications continues de $A \subset \mathbb{R}^p$, non vide, dans $\mathbb{R}$, se note $\mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$.

Théorème : Si $f, g \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$, alors :

- La somme $f + g$ est continue sur A ;
- le produit de f par un réel λ est continu sur A ;
- le produit $f \times g$ est continu sur A ;
- et le quotient $\dfrac{f}{g}$ est continu en tout vecteur u_0 de A tel que $g(u_0) \neq 0$.

Théorème : Les applications « composantes » : $f_i : (u_1, u_2, \ldots, u_p) \to u_i$ sont continues sur $\mathbb{R}^p$.

2.3. Image d'une partie fermée bornée de A par $f \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$

Théorème : $f \in \mathscr{C}^0(A, \mathbb{R})$, $B \subset A$, B une partie fermée et bornée, alors $f(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$ et les bornes sont atteintes.

La démonstration est admise.

3. Fonctions $\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$, Dérivées Partielles Premières

Dans cette partie, toutes les fonctions sont supposées définies sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^p$. On travaillera toujours sur ce domaine $\mathscr{U}$, sur lequel on a donc une application.

3.1. Application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$

Définition : $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, définie sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, on appelle **dérivée partielle de** f par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable, au point $u = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \lim_{t \to x_i} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, t, \ldots, x_p) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_p)}{t - x_i}$$

si cette limite existe.
Sinon, on dit que f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable, au point $u = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$.
On parle de dérivée partielle première.

> Quand il n'y a que 2 ou 3 variables on note souvent les dérivées partielles,
> $$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{ou même} \quad \frac{\partial g}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}$$
> Mais, on n'oubliera pas, en cas d'ambiguïté, qu'il s'agit des dérivées par rapport à la première, la seconde, ou la $i^{\text{ème}}$ variable, pas de la dérivée par rapport à la variable x ou y...

Notation : Les dérivées partielles en u se notent de différentes façons :
- Comme on vient de le voir : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(u)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(u)$, mais cela peut être ambigu parfois !
- Mais aussi avec le D de la dérivation : $\mathrm{D}_i f(u)$,
- ou encore avec le ∂ de la dérivation : $\partial_i f(u)$;

Définition : f est de **classe** $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ $\Leftrightarrow$ f admet p dérivées partielles continues sur $\mathscr{U}$.
C'est à dire : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est définie et continue sur $\mathscr{U}$

Théorème : On considère deux applications f et g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et λ un réel, alors
- $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$,
- λf est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$,
- $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$,
- $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert inclus dans $\mathscr{U}$ tel que g ne s'y annule pas.

Démonstration : Les dérivées partielles se calculent, en pratique, comme des dérivées.
Ce qui donne les résultats annoncés. ■

3.2. Gradient, point critique

Définition :
$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, définie sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, $u = \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \in \mathscr{U}$

On appelle **gradient de** f en u, noté $\nabla f = \overrightarrow{\mathrm{Grad}_u(f)}$, le vecteur : $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(u) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(u) \end{pmatrix}$

Ce gradient a une grande importance dans l'étude des courbes d'équation $f(x, y) = 0$ ou des surfaces d'équation $f(x, y, z) = 0$ dans un repère orthonormal.

Définition : Un point **critique** de f est un point u de $\mathscr{U}$ tel que toutes les dérivées partielles y sont nulles.

> Un point critique est simplement un point où le gradient est nul !

3.3. Développement limité à l'ordre 1

Théorème : f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $u \in \mathscr{U}$. Alors :

$$f(u+\mathrm{d}u) = f(u) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u)\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u)\,\mathrm{d}x_2\right) + \mathrm{o}\left(\|\mathrm{d}u\|\right)$$

On appelle ceci le développement limité de f à l'ordre 1.

3.4. Extremums d'une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$

On va d'abord chercher une condition nécessaire d'existence d'un extremum local pour une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$.

Théorème : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, $u \in \mathscr{U}$, u en extremum local de f. Alors, $\mathrm{d}f_u = 0$, c'est à dire : $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(u) = 0$

Une condition **nécessaire** pour que f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, admette un extremum local en u est que u est un point critique de f.

Démonstration : Si on a un extremum, $f(u+\mathrm{d}u) - f(u) = \mathrm{A}$ est de signe constant pour $\|\mathrm{d}u\|$ assez petit.

C'est à dire que : $\mathrm{A} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u)\,\mathrm{d}x_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(u)\,\mathrm{d}x_2\right) + \mathrm{o}(\mathrm{d}u)$ est de signe constant.

Si la partie régulière est non nulle, pour $\|\mathrm{d}u\|$ assez petit, la quantité A donnée est du signe de cette partie régulière. Mais en changeant $\mathrm{d}u$ en $-\mathrm{d}u$, cette partie régulière est changée en son opposé. La quantité A change donc de signe, ce qui est impossible. La partie régulière est donc nulle :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(u)\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u)\,\mathrm{d}x_2 = 0 \quad \text{pour tous} \quad (\mathrm{d}x_1,\ \mathrm{d}x_2)$$

Ce qui prouve que : $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(u) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(u) = 0.$ ■

> Un extremum global de f de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, un fermé borné, est donc à rechercher :
> - parmi les extremums locaux sur l'intérieur,
> - ou parmi les autres points, en général les points du bord.

En effet, il peut y avoir d'autres points dans A, appelés « points isolés », mais comme, pour ces points, la notion de continuité et la classe n'ont pas de sens, ce cas ne se présente pas en pratique pour nous.

3.5. Dérivées partielles de fonctions composées

On écrit le théorème pour une fonction de 2 variables. L'énoncé pour une fonction de p variables s'en déduit facilement.

Théorème :

$$\left.\begin{array}{r} x,\ y,\ z : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur I} \\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathscr{U} \text{ contenant } x(\mathrm{I}) \times y(\mathrm{I}) \times z(\mathrm{I}) \\ \mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ définie par } \forall t \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}(t) = f(x(t),\ y(t)) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{F} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur I, et :}$$

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$$

Ou encore, en utilisant la notation différentielle : $\dfrac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

Toujours avec la notation différentielle : $\mathrm{dF} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$

Enfin, avec la notation différentielle utilisée en physique et en technologie : $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$

Bien sûr, toutes les dérivées partielles sont prises en $(x(t),\ y(t))$ et les dérivées en t.

Démonstration : Cette démonstration n'est pas complètement rigoureuse !

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(t+\mathrm{d}t)-\mathrm{F}(t) &= f(x(t+\mathrm{d}t),\, y(t+\mathrm{d}t)) - f(x(t),\, y(t)) \\
&= f\left(x(t)+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+\mathrm{o}(\mathrm{d}t),\, y(t)+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+\mathrm{o}(\mathrm{d}t)\right)-f(x(t),\, y(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\times\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+\mathrm{o}(\mathrm{d}t)\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\times\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+\mathrm{o}(\mathrm{d}t)\right) \\
&\quad +\mathrm{o}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+\mathrm{o}(\mathrm{d}t),\, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t+\mathrm{o}(\mathrm{d}t)\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{o}(\mathrm{d}t)+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{o}(\mathrm{d}t)\right)+\mathrm{o}(\mathrm{d}t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{o}(\mathrm{d}t)
\end{aligned}$$

■

Théorème : On écrit ce théorème pour la composée de fonctions de plusieurs variables avec 2 et 2 variables.
Ceci est bien sûr arbitraire, le théorème s'applique avec p et q variables...

$$\left.\begin{array}{r} h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathscr{U} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^2 \\ f,\, g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathscr{V} \text{ un ouvert de } \mathbb{R}^2 \\ \forall x,\, y\in\mathscr{V}, (f(x,\, y),\, g(x,\, y))\in\mathscr{U} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{F}:\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{V} & \to & \mathbb{R} \\ (x,\, y) & \to & h(f(x,\, y),\, g(x,\, y)) \end{array}\right.$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{V}$ et :

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y}$$

Démonstration : Quand on fixe y, on se retrouve exactement dans les hypothèses du théorème précédent. Ce qui donne $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$. De même, on fixe x pour obtenir $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}$. ■

3.6. Cas des coordonnées polaires

Les coordonnées polaires se définissent par : $\left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{array}\right.$

On en déduit donc : $\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial x}{\partial \rho}=\cos\theta & ; & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}=-\rho\sin\theta \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho}=\sin\theta & ; & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}=\rho\cos\theta \end{array}\right.$

4. Fonctions $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de Classe $\mathscr{C}^2$, Dérivées Secondes

4.1. Application de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$

Définition : $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, définie sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^p$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$,
on dit que f est de **classe** $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$ $\Leftrightarrow$ les p applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2},\ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$.

L'application $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ est la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle se note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
Il y a donc à priori p^2 dérivées partielles secondes.

- Quand on n'a que deux variables, comme ici le plus souvent, on utilise (x,y) plutôt que (x_1,x_2) !

  On aura donc à priori quatre dérivées partielles secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$;
- ces dérivées se notent parfois respectivement : $\partial_1\partial_1 f, \partial_2\partial_2 f, \partial_1\partial_2 f, \partial_2\partial_1 f$.

Théorème : On considère deux applications f et g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et λ un réel, alors
- $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$,
- λf est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$,
- $f\times g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$,
- $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert inclus dans $\mathscr{U}$ tel que g ne s'y annule pas.

Démonstration : Les dérivées partielles secondes se calculent, en pratique, comme des dérivées. Ce qui donne les résultats annoncés. ■

4.2. Théorème de Schwarz

On admettra ce théorème important.

Théorème : f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U} \Rightarrow \forall i,j\in\{1,2,\ldots,p\}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$.

On dit que pour f de classe $\mathscr{C}^2$, les dérivées partielles secondes croisées sont égales.

5. Équations aux dérivées partielles

5.1. Équation aux dérivées partielles du premier ordre

a/ Équation simple

Théorème : Les solutions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de l'équation : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)$ avec g continue sur $\mathscr{U}$ sont de la forme : $f(x,y) = \displaystyle\int g(x,y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{K}(y)$ où :
- $\displaystyle\int g(x,y)\,\mathrm{d}x$ est une primitive quelconque de g par rapport à x ;
- K est une application quelconque de classe $\mathscr{C}^1$ sur la projection de $\mathscr{U}$ sur Oy.

Démonstration : On travaille comme si y était un paramètre constant, la constante K d'intégration est donc constante quand y est constant, c'est donc une application de y de classe $\mathscr{C}^1$, comme f. ■

b/ Système

On étudie ici les systèmes différentiels d'équations aux dérivées partielles dans le cas le plus simple.

Pour résoudre sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, le système : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = h(x,y) \end{cases}$

- On vérifie d'abord que les **dérivées partielles croisées** sont **égales**, en dérivant la première équation par rapport à x et la seconde par rapport à y.

Si ça n'est pas le cas, il y a peu de chances qu'il y ait des solutions puisque f ne peut être de classe $\mathscr{C}^2$.

- On intègre **la première équation**, ce qui donne une fonction inconnue $K(y)$;
- puis on **dérive par rapport** y l'expression de f obtenue ;
- et enfin, on **réinjecte** le résultat obtenu dans la deuxième équation, ce qui donne une expression de $K'(y)$ qu'on intègre.

Exemple : Considérons le système : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x+1)\cos(x+y) + \sin(x+y) - \sin x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x+1)\cos(x+y) \end{cases}$

On calcule les dérivées partielles secondes croisées : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \cos(x+y) - (x+1)\sin(x+y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$.
Cette égalité étant vérifiée, on intègre maintenant l'équation la plus simple, visiblement la seconde.
Ceci donne : $f(x, y) = (x+1)\sin(x+y) + K(x)$.
On dérive maintenant cette égalité par rapport à x, et on obtient :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x+1)\cos(x+y) + \sin(x+y) + K'(x) = (x+1)\cos(x+y) + \sin(x+y) - \sin x$.
On en déduit : $K'(x) = -\sin x$ et donc $K(x) = \cos x + cte$.
Finalement : $f(x, y) = (x+1)\sin(x+y) + \cos x + cte$.

> Si c'est plus simple, on peut inverser l'ordre des deux équations.

> En **aucun cas**, on n'intègre les deux équations séparément, car, on obtient alors deux expressions différentes de f dont on ne sait pas quoi faire...

5.2. Équation aux dérivées partielles du second ordre

a/ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$

Théorème : Les solutions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de l'équation : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$
sont de la forme : $f(x, y) = x\,K(y) + L(y)$
où K et L sont des applications quelconques de classe $\mathscr{C}^2$ sur la projection de $\mathscr{U}$ sur Oy.

Démonstration : On utilise deux fois le théorème sur le premier ordre. ■

b/ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$

Théorème : Les solutions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}$, un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de l'équation : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$
sont de la forme : $f(x, y) = K(x) + L(y)$
où K et L sont des applications quelconques de classe $\mathscr{C}^2$ sur la projection de $\mathscr{U}$ sur Ox et Oy respectivement.

Démonstration : On utilise deux fois le théorème sur le premier ordre et le fait qu'une primitive quelconque d'une application quelconque de classe $\mathscr{C}^1$ est une application quelconque de classe $\mathscr{C}^2$...
■

c/ Exemple : équation de propagation de d'Alembert

Sous sa forme la plus simple, cette équation est : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$

On pose : $f(x,t) = g(u,v)$ avec : $\begin{cases} u = x - c\,t \\ v = x + c\,t \end{cases}$ en posant f et g de classe $\mathscr{C}^2$.

On utilisera sans le rappeler à chaque fois le théorème de Schwarz et le théorème sur les dérivées de fonctions composées.

On obtient facilement : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f}{\partial t} = -c\,\dfrac{\partial g}{\partial u} + c\,\dfrac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$

En dérivant une seconde fois : $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -c\left(-c\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} + c\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right) + c\left(-c\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + c\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) \end{cases}$

On obtient donc, après simplification : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 4\,\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0.$

Ce qui donne : $g(u,v) = \mathrm{K}(u) + \mathrm{L}(v)$,

et enfin :

$$f(x,t) = \mathrm{K}(x - c\,t) + \mathrm{L}(x + c\,t)$$

K et L étant des applications quelconques de classe $\mathscr{C}^2$.