Sommaire

Ce chapitre étudie trois types différents d'équations et systèmes différentiels :
- Les systèmes linéaires du premier ordre à coefficients constants.
- Les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

> Même si les fonctions cherchées peuvent être à valeur complexe, la variable est bien sûr réelle ! D'autre part, les solutions d'un système ou d'une équation différentiels n'ont de sens que sur un **intervalle.**

1. Equations Différentielles Linéaires du second ordre

1.1. Equation différentielle linéaire du second ordre

Définition : Une équation différentielle linéaire du second ordre est une équation du type :

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = d(x) \tag{E}$$

où a, b, c, d sont des fonctions continues sur I un intervalle où, de plus, a ne s'annule pas.
L'équation homogène associée à (E) est :

$$a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = 0 \tag{H}$$

Définition : *Problème de Cauchy*
Soit (E) une équation différentielle linéaire du second ordre sur un intervalle convenable I, avec $x_0 \in \mathrm{I}$.
Soient les conditions initiales $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y'_0$.
La donnée de (E) et des conditions initiales est un problème de Cauchy.

1.2. Existence des solutions

Théorème : *de Cauchy*
Soit :

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = d(x) \tag{E}$$

où a, b, c, d sont des fonctions continues de $\mathrm{I} \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), I un intervalle où, de plus, a ne s'annule pas.

Soit $x_0 \in \mathrm{I}$, et les conditions initiales $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

Alors le problème de Cauchy admet une solution unique de classe $\mathscr{C}^2$ sur I qui vérifie les conditions initiales.

> On ne tient compte des conditions initiales que lorsqu'on a la solution générale de l'équation avec second membre.

Théorème : Soit :

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = 0 \tag{H}$$

où a, b, c, d sont des fonctions continues de $\mathrm{I} \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), I un intervalle où, de plus, a ne s'annule pas.
Alors l'ensemble des solutions de (H) sur I a une structure d'espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{K}$.

Ces deux théorèmes sont admis.

> On notera l'intérêt d'avoir un espace vectoriel de dimension 2 car, la connaissance de 2 **solutions non proportionelles** donne alors immédiatement **l'ensemble des solutions** par combinaison linéaire.

Théorème : La solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (H).

Démonstration : Soit $y_1(x)$ une solution particulière de (E), $y(x)$ une solution quelconque de (E), alors, $(y(x) - y_1(x))$ est solution de (H).
Réciproquement, si $z(x)$ est solution de (H), $(y_1(x) + z(x))$ est alors solution de (E). ■

> En pratique, il nous suffit donc d'avoir :
> - Une solution particulière de (E),
> - Deux solutions non proportionelles de (H).

1.3. Recherche des solutions

a/ Variation de la constante

Il n'y a pas de méthode pour trouver dans tous les cas une solution de (E) ou de (H).
L'énoncé doit vous guider.

- Si on recherche une solution sous forme polynomiale, on cherchera d'abord son degré.
- On peut aussi faire faire un changement de variable (attention alors à la notation « prime » ambigüe) ou un changement de fonction inconnue.
- Enfin, on peut vous demander de rechercher une solution développable en série entière. On n'employe ce procédé qu'à la demande de l'énoncé.

Il existe **un seul procédé** (à notre programme) pour construire la solution générale de (E) à partir d'une solution de (H).
C'est la **variation de la constante**.

> La variation de la constante n'est pas un procédé miraculeux !
> Elle peut donner des calculs longs et difficiles.
> On la réserve donc au cas où **on n'a pas d'autre procédé** pour obtenir une telle solution particulière.

- Soit $h(x)$ une solution de (H) qui ne s'annule pas.
- On pose :

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x)\,h(x) \\ y'(x) &= z'(x)\,h(x) + z(x)\,h'(x) \\ y''(x) &= z''(x)\,h(x) + 2z'(x)\,h'(x) + z(x)\,h''(x) \end{aligned}$$

On reporte dans (E) :

$$\begin{aligned} a(x)\,y''(x) + b(x)\,y'(x) + c(x)\,y(x) = z(x)\underbrace{\left(a(x)\,h''(x) + b(x)\,h'(x) + c(x)\,h(x)\right)}_{=0} \\ + z'(x)\left(2a(x)\,h'(x) + b(x)\,h(x)\right) + z''(x)\,a(x)\,h(x) \\ d(x) = z'(x)\left(2a(x)\,h'(x) + b(x)\,h(x)\right) + z''(x)\,a(x)\,h(x) \end{aligned}$$

- On obtient donc une équation différentielle linéaire du premier ordre en z' :
  $z''(x)\,a(x)\,h(x) + z'(x)\left(2a(x)\,h'(x) + b(x)\,h(x)\right) = d(x)$
  On résout d'abord cette équation sans le second membre. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} z'(x) &= \mathrm{K}\exp\left(-\int \frac{\left(2a(x)\,h'(x) + b(x)\,h(x)\right)}{a(x)\,h(x)}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \mathrm{K}\exp\left(-\int \frac{2h'(x)}{h(x)} + \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{\mathrm{K}}{(h(x))^2}\exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

  Il suffit alors de terminer ce calcul et, d'éventuellement trouver une solution particulière à l'équation avec second membre. On pourra au besoin utiliser encore une fois la technique de la variation de la constante applicable aux équations différentielles linéaires du premier ordre.
- On obtient donc $z'(x)$ qu'il suffit de primitiver.
- Enfin, on n'oublie pas que $y(x) = z(x)\,h(x)$ est la solution générale de (E).
- Il faut absolument travailler **le plus longtemps possible** en calcul formel pour bénéficier des simplifications constatées...

Exemple : On va résoudre l'équation différentielle : $x(x+1)\,y'' + (x+2)\,y' - y = 0$.
- On cherchera d'abord une solution polynomiale.
  Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants et sans second membre.
  On la résout sur un intervalle I ne contenant pas 0 ni 1.
- On cherche une condition nécessaire sur le degré du polynôme, en n'écrivant à chaque fois que le terme de plus haut degré : $y = x^n + \ldots$
  et donc : $y' = nx^{n-1} + \ldots$
  et enfin : $y'' = n(n-1)\,x^{n-2} + \ldots$
  qu'on reporte dans l'équation :
  $x(x+1)\,y'' + (x+2)\,y' - y = (n(n-1) + n - 1)\,x^n + \ldots = (n-1)^2\,x^n + \ldots = 0,$
  on en conclut que $n = 1$.

- On pose donc $y = x + a$, d'où $y' = 1$ et $y'' = 0$. On a donc $(x+2) - x - a = 0$ et donc $a = 2$.
  $h = x + 2$ est solution de l'équation sur I.
- On applique maintenant la variation de la constante : $y = h\,z$, ce qui donne, en écourtant le calcul, qu'on mène en théorique :
  $x\,(x+1)\,h\,z'' + (2x\,(x+1)\,h' + (x+2)\,h)\ z' = 0$.
  $z' = \mathrm{K}\exp\left(-\displaystyle\int \frac{2h'}{h} + \frac{x+2}{x(x+1)}\ \mathrm{d}x\right) = \frac{\mathrm{K}}{(x+2)^2}\exp\left(-\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x+1)}\ \mathrm{d}x\right)$
  $z' = \dfrac{\mathrm{K}}{(x+2)^2}\exp\left(-\displaystyle\int \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\ \mathrm{d}x\right) = \mathrm{K}\dfrac{x+1}{x^2\,(x+2)^2} = \dfrac{\mathrm{K}}{4}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}\right)$
  en utilisant les décompositions classiques en éléments simples.
  En primitivant, on obtient : $z = \dfrac{\mathrm{K}}{4}\left(\dfrac{1}{(x+2)} - \dfrac{1}{x}\right) + \mathrm{L}$.
- Ce qui donne finalement $y = \dfrac{\mathrm{K}}{4}\left(1 - \dfrac{x+2}{x}\right) + \mathrm{L}\,(x+2) = \dfrac{\mathrm{K}'}{x} + \mathrm{L}\,(x+2)$.

b/ Solution en série entière

> **À la demande de l'énoncé**, on peut aussi chercher les solutions développables en série entière !

Tout d'abord quelques remarques :
- Cela s'utilise principalement quand les applications a, b, c, d sont des polynômes.
- On ne travaille pas sur un intervalle convenable, mais sur un intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, r étant le rayon de convergence de la série entière trouvée à la fin du calcul.
  On dit explicitement qu'on travaille sur cet intervalle, même si on ne connaît pas R !

Ensuite, on suit scrupuleusement la méthode indiquée :
- On écrit : $y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $y' = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,a_n x^{n-1}$ et $y'' = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2}$, pour $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$;
- On distribue les polynômes pour avoir une somme de séries entières ;
- On regroupe les termes qui se regroupent naturellement, en faisant attention à l'indice de début, on a alors une somme de deux ou trois séries entières ;
- On réindexe pour regrouper ces séries entières en une seule série entière nulle ;
- Alors, tous les coefficients sont nuls, ce qui donne une relation de récurrence entre les a_n.

> Dans ce calcul, **on ne quitte jamais** le domaine des séries entières !

1.4. Recollement de solutions

On résout une équation ou un système différentiels sur un **intervalle** où $a(x)$ ne s'annule pas.
Assez souvent, on demande de recoller les solutions sur des intervalles séparés par un point où $a(x)$ s'annule.
Pour recoller en γ les solutions sur deux intervalles, f sur $]\alpha, \gamma[$ et g sur $]\gamma, \beta[$ il faut chercher à égaler
- les limites (finies) de f et g en γ
- les limites (finies) de f' et g' en γ
- et éventuellement, les limites (finies) de f'' et g'' en γ, dans le cas d'une équation diiférentielle du second ordre.

On note qu'il est important **d'appeler de façons différentes** les constantes utilisées par
- f sur $]\alpha, \gamma[$ et,
- g sur $]\gamma, \beta[$.

Exemple : On va chercher sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation différentielle : $y'' + y = |x|$.
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre.

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace affine de dimension 2 car la fonction valeur absolue est continue.
Les solutions de l'équation homogène associée sont $y = A\cos x + B\sin x$.
On s'occupe maintenant de l'équation avec second membre.
Sur $]-\infty, 0]$ une solution particulière est $y = -x$, la solution générale : $y = A\cos x + B\sin x - x$.
Sur $[0, +\infty[$ une solution particulière est $y = x$, la solution générale : $y = C\cos x + D\sin x + x$.
Il s'agit maintenant de recoller ces deux solutions en 0.

- Égalité des limites de y en 0.
  En 0^-, la limite est A et en 0^+, la limite est C : A = C.
- Egalité des limites de y' en 0.
  En 0^-, la limite est $B - 1$ et en 0^+, la limite est $D + 1$: $D = B - 2$.
- Égalité des limites de y'' en 0.
  En 0^-, la limite est $-A$ et en 0^+, la limite est $-A$ aussi compte tenu de $A = C$.

La solution générale sur $\mathbb{R}$ est donc : $\begin{cases} y = A\cos x + B\sin x - x & \text{pour } x \in]-\infty, 0] \\ y = A\cos x + (B-2)\sin x + x & \text{pour } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

Cette fonction est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Systèmes Différentiels Linéaires du 1^{er} ordre

2.1. Système linéaire du premier ordre

Définition :

Soit A est une matrice carrée d'ordre n à coéfficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et : $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$,

un vecteur de classe $\mathscr{C}^k$ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Le **système linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et sans second membre est** : $X'(t) = AX(t)$.
Résoudre ce système, c'est trouver tous les vecteurs $X(t)$ qui le vérifient.

On ne traite que les systèmes à coefficients constants, c'est à dire où A ne dépend pas de t.

2.2. Cas où A est diagonalisable

Théorème : Soit A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), diagonalisable. On note $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres et $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ une base de vecteurs propres associés. Alors, l'ensemble des solutions de $X' = AX$, sur I un intervalle quelconque, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et :

$$X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} U_2 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n$$

Si, de plus, on fixe la condition initiale $X(0) = X_0$, la solution existe et est unique.

Démonstration : On appelle P la matrice de passage dont la $i^{ème}$ colonne est le vecteur U_i, alors, $P^{-1}AP = D$, matrice diagonale des λ_i. On pose : $Y = P^{-1}X$, $X = PY$, et on a : $Y' = P^{-1}X'$, $X' = PY'$ car P **est constant**, puisque A est constant.

$$\begin{aligned} X' &= AX \\ PY' &= APY \\ Y' &= P^{-1}APY = DY \end{aligned}$$

On pose : $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, le système devient : $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ y_2' = \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases}$ qui se résout en : $\begin{cases} y_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ y_n = \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{cases}$

Enfin, $X = PY$ donne alors : $X(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} U_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} U_2 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} U_n$ ■

On remarquera que dans ce cas, le calcul de P^{-1} est inutile.

2.3. Cas où A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Si on résout le système sur $\mathbb{C}$ comme on vient de le faire, les valeurs propres complexes non réelles sont 2 à 2 conjuguées et on peut prendre des vecteurs propres 2 à 2 conjugués. Pour un tel couple de valeurs propres :

$$\mathrm{Vect}\left(e^{\lambda t}U, e^{\overline{\lambda} t}\overline{U}\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}U\right), \mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}U\right)\right)$$

En effet :

$$e^{\lambda t}U = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}U\right) + i\,\mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}U\right) \qquad \text{et} \qquad e^{\overline{\lambda} t}\overline{U} = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}U\right) - i\,\mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}U\right)$$

et d'autre part :

$$\mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}U\right) = \frac{e^{\lambda t}U + e^{\overline{\lambda} t}\overline{U}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}U\right) = \frac{e^{\lambda t}U - e^{\overline{\lambda} t}\overline{U}}{2i}$$

Or, $\mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}U\right)$ et $\mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}U\right)$ sont deux solutions du système différentiel sur $\mathbb{R}$, formant une famille libre. Ce qui donne le théorème suivant :

Théorème : Dans le cas où A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, il suffit dans la famille génératrice des solutions de remplacer, pour les valeurs propres non réelles,

$$\alpha\, e^{\lambda t}U + \beta\, e^{\overline{\lambda} t}\overline{U} \qquad \text{par} \qquad a\,\mathrm{Re}\left(e^{\lambda t}U\right) + b\,\mathrm{Im}\left(e^{\lambda t}U\right)$$

avec a et b réels.

Exemple : On va résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$.

C'est un système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre.

Sa matrice est : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et son polynôme caractéristique est : $(1-\lambda)^2(2-\lambda) + 1 + (1-\lambda) = (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 1\right)$.

On a donc trois valeurs propres distinctes 2, $1+i$ et $1-i$. Par nécessité, on travaille pour le moment sur $\mathbb{C}$.

Les vecteurs propres suivants : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, forment, dans l'ordre des valeurs propres, une base de chaque sous-espace propre.

Sur $\mathbb{C}$, les solutions sont donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha\, e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\, e^{(1+i)t}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\, e^{(1-i)t}\begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\, e^{t} \begin{pmatrix} -\sin t + i\cos t \\ -\cos t - i\sin t \\ \cos t + i\sin t \end{pmatrix} + \gamma\, e^{t} \begin{pmatrix} -\sin t - i\cos t \\ -\cos t + i\sin t \\ \cos t - i\sin t \end{pmatrix},$$

ce qui fait que sur $\mathbb{R}$, les solutions sont : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\, e^{t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c\, e^{t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

2.4. Comportement asymtotique des solutions

Dans le cas ou la matrice A est diagonalisable, les solutions sont des combinaisons linéaires des exponentielles des λt, où les λ sont les valeurs propres.
On s'intéresse ici à ce qui se passe quand $t \to +\infty$, ce qui ne dépend que de la partie réelle des valeurs propres.
À ce moment, on a donc le résultat suivant :

- Le vecteur solution tend vers la vecteur nul si et seulement si toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative.
- Le vecteur solution tend vers un vecteur périodique si et seulement si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative, l'une au moins étant de partie réelle nulle.
- Dans les autres cas, le vecteur solution n'est pas borné à l'infini.

2.5. Cas où A est triangularisable, non diagonalisable

Dans le cas où A est triangularisable, non diagonalisable, on considère P de passage telle que

$$T = P^{-1}AP$$

avec T triangulaire supérieure.
L'énoncé du problème doit vous guider pour trouver T et P.

On pose : $X(t) = PY(t)$, on obtient : $X'(t) = PY'(t)$, car P est constant.

On reporte dans le système différentiel et on obtient : $Y'(t) = TY(t)$.
Travaillons maintenant sur un exemple pour plus de clarté, en considérant au départ directement la matrice triangulaire T : $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
Ce qui donne :

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 \\ y_2' &= 3y_2 + y_3 \\ y_3' &= 3y_3 \end{aligned}$$

On résout en partant de la dernière équation, et en remontant équation par équation, puis $X = PY$ permet de conclure.
Remarquons que le calcul de P^{-1} est toujours inutile.

2.6. Lien entre systèmes et équations différentielles

Théorème : La résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants, de deux équations du premier ordre, équivaut à la résolution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, à coefficients constants et sans second membre.

Démonstration : Le système s'écrit : $\begin{cases} x' = a\,x + b\,y \\ y' = c\,x + d\,y \end{cases}$
On dérive la seconde équation : $y'' = c\,x' + d\,y' = c\,(a\,x + b\,y) + d\,y'$
On remarque que : $c\,x = y' - d\,y$, on obtient : $y'' = a\,(y' - d\,y) + bc\,y + d\,y'$
Finalement, y vérifie l'équation différentielle : $y'' - (a+d)\,y' + (ad - bc)\,y = 0$.
On a une solution unique du système si on fixe $x(t_0)$ et $y(t_0)$, ce qui revient à fixer $y(t_0)$ et $y'(t_0)$.
Résoudre le système revient bien à résoudre l'équation différentielle !...
On a même mieux : les valeurs propres du système sont les racines de : $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$, qui s'écrit aussi : $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$.
Tandis que l'équation caractéristique de l'équation différentielle est : $r^2 - (a+d)r + ad - bc = 0$!
Pas si étrange que cela finalement ! ■

Ce théorème se généralise :

Théorème : La résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants, de n équations du premier ordre, équivaut à la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, à coefficients constants et sans second membre.

3. Solutions Approchées d'une Équation Différentielle

3.1. Méthode d'Euler pour une équation différentielle du premier ordre

Le principe de la méthode d'Euler est très simple. On va l'appliquer à une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

On cherche une solution approchée vérifiant la condition initiale. Pour cela, on choisit un pas Δx, on écrit :

$$\Delta y = f(x_0, y_0) \times \Delta x$$

et on approxime : $y(x_0 + \Delta x) \simeq y(x_0) + \Delta y$.
On pose alors :

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

Ensuite, on calcule : $\Delta y = f(x_1, y_1) \times \Delta x$,
et on pose :

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

On recommence jusqu'à avoir une solution approchée sur l'intervalle désiré.

3.2. Autres équations différentielles

La méthode d'Euler est applicable aux autres équations différentielles et systèmes différentiels.

Avec, par exemple, une équation différentielle du second ordre :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \\ y(x_0) &= y_0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) &= y'_0 \end{aligned}$$

On choisit Δx, avec les approximations, on pose : $\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + y'_0 \times \Delta x \\ y'_1 = y'_0 + f\left(x_0, y_0, y'_0\right) \times \Delta x \end{cases}$

On recommence ensuite à partir de x_1, y_1 et y'_1... pour calculer x_2, y_2 et y'_2...

3.3. Problèmes de la méthode

La méthode d'Euler a l'avantage de toujours être applicable.
L'inconvénient essentiel est du à l'accumulation des erreurs qui peuvent faire que, rapidement, la fonction calculée point par point n'a plus de rapport avec la solution cherchée.
Géométriquement, il est facile d'observer que si les courbes intégrales ont de fortes courbures en certains points, la méthode dérive vite et donne des courbes sans rapport avec les courbes intégrales.
Par ailleurs, un petit pas allonge les calculs et un grand pas augmente les erreurs...

4. Pour les physiciens

4.1. Régimes transitoire et permanent

On notera la différence essentielle de vocabulaire entre mathématiciens et physiciens dans le traitement des équations différentielles linéaires.

Mathématiques	**Physique**
Solution **particulière** de l'équation différentielle **avec** second membre	Régime **permanent**
Solution **générale** de l'équation différentielle **sans** second membre	Régime **transitoire**

Il n'y a pas d'erreur, le vocabulaire des physiciens vient de ce que, très souvent, la solution générale de l'équation sans second membre tend rapidement vers 0...
Il ne reste alors que la solution particulière de l'équation avec second membre... qui est bien le régime permanent !
Rappelons enfin qu'en physique, comme ailleurs, on ne calcule que ce qui nous intéresse.
Enfin, rappelons qu'en physique, comme en techno, le régime transitoire est souvent négligé, ce qui conduit à ne pas avoir à résoudre l'équation sans second membre.

4.2. Phénomène oscillatoire « libre »

Dans le cas d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre, c'est à dire « libre » ou « non forcé », on peut remarquer que :

> le phénomène est oscillatoire (amorti ou non) **si et seulement si** $\Delta < 0$

où Δ est le discriminant de l'équation caractéristique.
En effet, il faut une partie imaginaire non nulle aux solutions de l'équation caractéristique pour avoir des cosinus et sinus, et donc un aspect « oscillatoire ».

4.3. Equation différentielle harmonique

En physique, on écrit **directement** les soutions de : $y'' + \omega^2 y = 0$ sous la forme :

- $y = \mathrm{A}\cos\omega t + \mathrm{B}\sin\omega t$
  ou,
- $y = \mathrm{C}\cos(\omega t \pm \varphi)$
  mais **jamais**,
- $y = \lambda\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \mu\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$

Jamais veut bien dire *jamais* !

Remarque : A, B, C et φ sont réels tandis que λ et μ sont complexes conjugués.