

Sommaire

1. Courbes paramétrées	1	3.2. Ensemble d'étude et symétries	5
1.1. Tangente et demi-tangente en un point	1	3.3. Variations	5
1.2. Interprétation cinématique	3	3.4. Tracé du graphe	6
1.3. Longueur d'un arc paramétré	3		
2. Étude d'une courbe paramétrée plane	4	4. Courbes planes définies de façon implicite	7
2.1. Ensemble d'étude	4	4.1. Lignes de niveau	7
2.2. Variations	4	4.2. Tangente en un point non singulier	7
2.3. Points réguliers et points stationnaires	4		
3. Exemple d'étude de courbe paramétrée plane	5	5. Surfaces en cartésiennes	7
3.1. Le paramétrage	5	5.1. Surface d'équation $F(x, y, z) = 0$	7
		5.2. Plan tangent en un point non singulier	8
		5.3. Position de la surface par rapport au plan tangent	8

Il existe plusieurs moyens de décrire une courbe pour l'étudier :

- Pour une courbe plane $\mathcal{C}$:
 - $y = f(x)$, qui est une équation cartésienne de $\mathcal{C}$,
 - $\begin{pmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$,
 - $F(x, y) = 0$, en ligne de niveau, qui est aussi une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
- Pour les courbes de l'espace :
 - $\begin{pmatrix} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$.

Concernant les courbes de l'espace, les seules notions abordées dans ce chapitre sont la tangente à une courbe paramétrée et la longueur d'un arc.

Dans la partie sur les surfaces, on verra aussi comment déterminer, si elle existe, la tangente à une courbe de l'espace définie par intersection de surfaces.

Pour le reste, toutes les courbes étudiées sont planes. Ce chapitre complète ce que vous avez déjà pu apprendre sur le sujet.

Dans tout le chapitre, on travaille dans le plan ou l'espace euclidien habituel muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ou $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ selon les cas.

En l'absence de mention contraire, les coordonnées d'un point sont prises dans ce repère.

1. Courbes paramétrées

1.1. Tangente et demi-tangente en un point

La courbe $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M ou $M(t)$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F(t)}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ou

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ selon les cas, $t \in I$, un intervalle de $\mathbb{R}$.

Sur cet intervalle, on suppose au minimum que $\overrightarrow{F}$ est continue.

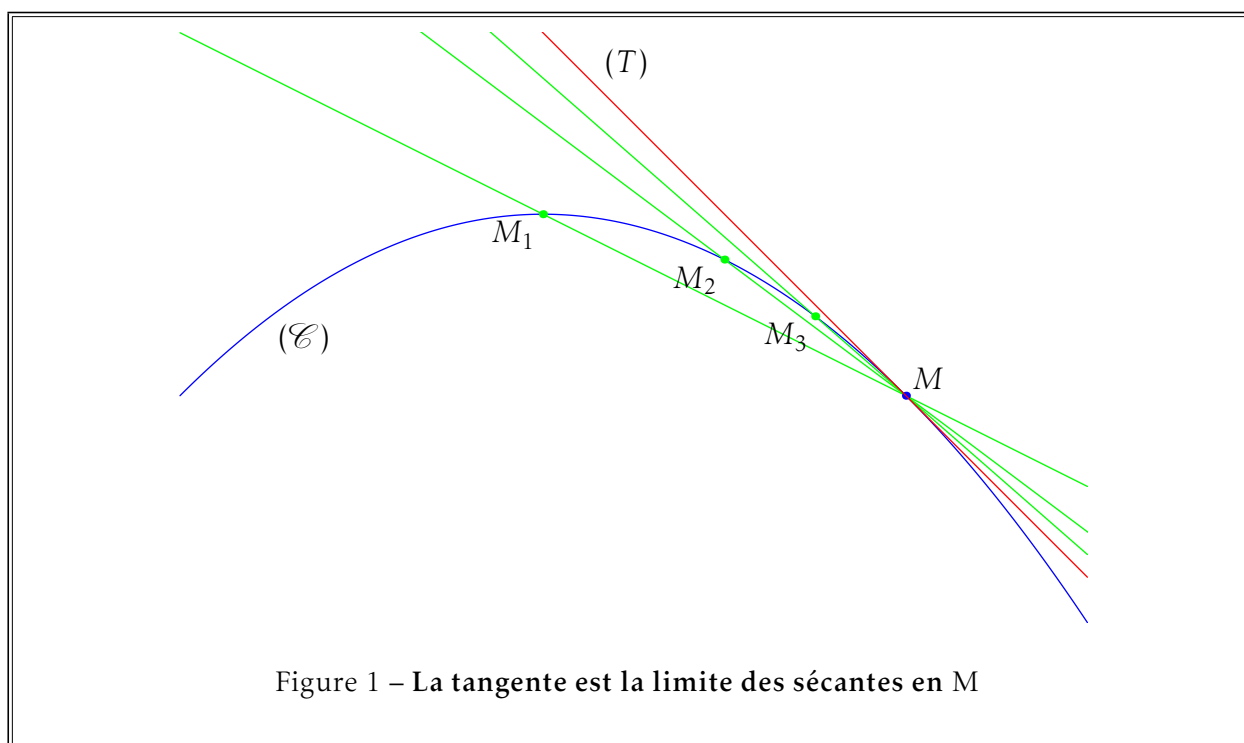
Définition : $M_0(t_0) \in C$, on dit que $\mathcal{C}$ **admet une tangente** en M_0

$\Leftrightarrow$ la droite (M_0M) , avec $M = M(t)$, a une limite quand $M \rightarrow M_0$, c'est à dire quand $t \rightarrow t_0$.

Cette droite est alors la **tangente** à $\mathcal{C}$ en M_0 .

On parlera éventuellement de demi-tangente si on a une limite à droite ou une limite à gauche.

Voir la figure 1, ci-dessous.



Comme il y a, selon son orientation, deux vecteurs unitaires qui dirigent une droite, cela revient à ce que le vecteur unitaire $\pm \frac{\overrightarrow{M_0M}}{\|\overrightarrow{M_0M}\|}$ admet une limite quand $M \rightarrow M_0$.

La tangente est alors la droite passant par M_0 et dirigée par ce vecteur.

Définition : Un point $M_0(t_0) \in C$ est **régulier** $\Leftrightarrow \overrightarrow{F'(t_0)} \neq \vec{0}$.

Définition : Un point non régulier est un point stationnaire.

Théorème : En un point $M_0(t_0)$ régulier, la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente dirigée par $\overrightarrow{F'(t_0)}$.

Démonstration : On fait la démonstration pour une courbe plane, c'est exactement la même pour une

courbe paramétrée de l'espace. $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{\|\overrightarrow{M_0M}\|}$ a pour coordonnées :

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} = \frac{t - t_0}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} \begin{pmatrix} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{t-t_0}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} &= \frac{t-t_0}{\sqrt{(x(t)-x(t_0))^2 + (y(t)-y(t_0))^2}} \\ &= \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)^2}} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t-t_0}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} &= \frac{\pm 1}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{\|\overrightarrow{M_0M}\|} \begin{pmatrix} x(t)-x(t_0) \\ y(t)-y(t_0) \end{pmatrix} &= \frac{\pm 1}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}} \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ce qui assure le résultat. ■

Théorème : $M_0(t_0)$ un point stationnaire de $\mathcal{C}$, si $\overrightarrow{F}$ est de classe suffisante au voisinage de t_0 , pour qu'il existe un vecteur dérivé non nul $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$.

Alors, $\mathcal{C}$ admet en M_0 une tangente ou des demi-tangentes. Elles sont portées par ce premier vecteur dérivé non nul $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$. On note habituellement p l'ordre de dérivation de ce vecteur.

Démonstration : On travaille ici exactement de la même façon dans le plan ou dans l'espace. On fait un développement limité de $\overrightarrow{F}$ à l'ordre p , en tenant compte du fait que les dérivées aux ordres inférieurs à p sont nulles :

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{F(t)} - \overrightarrow{F(t_0)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!} \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + (t-t_0)^p \varepsilon(t-t_0)$$

Ce qui permet d'avoir le résultat annoncé en calculant la limite de $\frac{\overrightarrow{M_0M}}{\|\overrightarrow{M_0M}\|}$. ■

1.2. Interprétation cinématique

Si on considère que t est le « temps », on peut considérer qu'on étudie le déplacement d'un « mobile » dans le plan (ou l'espace).

On utilise alors le vocabulaire suivant :

- la courbe est la **trajectoire** du mobile :
- le vecteur dérivé $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ est le **vecteur vitesse** du mobile, sa norme est sa **vitesse**.
- le vecteur dérivé seconde $\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ est le **vecteur accélération** du mobile, sa norme est son **accélération**.

1.3. Longueur d'un arc paramétré

Ce paragraphe est applicable aux courbes paramétrées de l'espace.

Définition : Soit $\mathcal{C}$ un arc paramétré du plan, ou de l'espace, tel que :

$M(t)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ avec x, y, z de classe $\mathcal{C}^1$ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.

La **longueur** de $\mathcal{C}$ entre $M(a)$ et $M(b)$ est selon les cas :

$$L(C) = \int_a^b \left\| \overrightarrow{M'(t)} \right\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$L(C) = \int_a^b \left\| \overrightarrow{M'(t)} \right\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

2. Étude d'une courbe paramétrée plane

On a :
$$\begin{cases} x = f(t) = x(t) \\ y = g(t) = y(t) \end{cases}$$

2.1. Ensemble d'étude

On recherche les ensembles de définition, les éventuelles parité ou imparité, les périodicités, pour aboutir à l'ensemble d'étude commun aux deux fonctions.

On indiquera alors les transformations à appliquer à l'arc de courbe pour reconstituer la courbe entière.

2.2. Variations

On étudie les variations de f et g .

Il faut construire le tableau de variation, qui contient les lignes $t, x'(t), x(t), y(t), y'(t)$ et $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ qui représente la pente de la tangente.

Remarquons que si $\frac{y'(t)}{x'(t)}$ est une forme indéterminée en un point, on peut la remplacer par sa limite qui représente encore la pente de la tangente.

2.3. Points réguliers et points stationnaires

Les points stationnaires vérifient :
$$\begin{cases} x'(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Théorème : M_0 est un point régulier, ou non stationnaire, si et seulement si $p = 1$

On appelle habituellement :

- p , avec $p \geq 1$, le premier rang où $\begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$ est non nul, ce vecteur est alors tangent à la courbe.
- q , avec $q > p$, le premier rang où $\begin{pmatrix} x^{(q)}(t_0) \\ y^{(q)}(t_0) \end{pmatrix}$ est non colinéaire à $\begin{pmatrix} x^{(p)}(t_0) \\ y^{(p)}(t_0) \end{pmatrix}$

Comme on l'a déjà vu, la courbe est toujours tangente à $\overrightarrow{F^{(p)}(t_0)}$,

On remarque que $\left(O, \overrightarrow{F^{(p)}(t_0)}, \overrightarrow{F^{(q)}(t_0)} \right)$ constitue alors un repère du plan :

- la parité de p donne le signe de la première coordonnée dans ce repère, et,
- la parité de q donne dans ce cas le signe de la deuxième coordonnée.

Ceci, bien sûr, quand $t < t_0$!

On a donc le résultat suivant :

Théorème :

- Si q est pair, la courbe ne traverse pas la tangente,
- si q est impair, la courbe traverse la tangente.

Les cas les plus courants sont :

- $p = 1$ et $q = 2$, c'est un point « ordinaire », la courbe ne traverse pas la tangente ;
- $p = 1$ et $q = 3$, c'est un point d'inflexion, la courbe traverse la tangente.

Remarque : On utilise souvent un développement limité pour trouver p et q .

q impair se trouve classiquement, on l'a vu, dans les points d'inflexions !

3. Exemple d'étude de courbe paramétrée plane

3.1. Le paramétrage

Il s'agit d'étudier la courbe définie par :
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = t \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

3.2. Ensemble d'étude et symétries

x et y sont définies, dérivables sur $\mathbb{R}$.

x est paire et y impaire, on peut donc limiter l'étude à $[0, +\infty[$, une symétrie par rapport à Ox permettra d'obtenir le graphe complet.

On remarque que, pour $t = 1$, le graphe passe par l'origine.

3.3. Variations

On calcule facilement : $x'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$, ainsi que : $y'(t) = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$.

x' est nul en 0, puis négatif.

y' est nulle en $t_0 = \sqrt{-2 + \sqrt{5}}$, seule racine réelle positive, positive d'abord puis négative.

On ajoute aussi le point correspondant à $t = 1$ où la courbe passe par l'origine.

Les limites sont simples à calculer et on a le tableau de variations suivant :

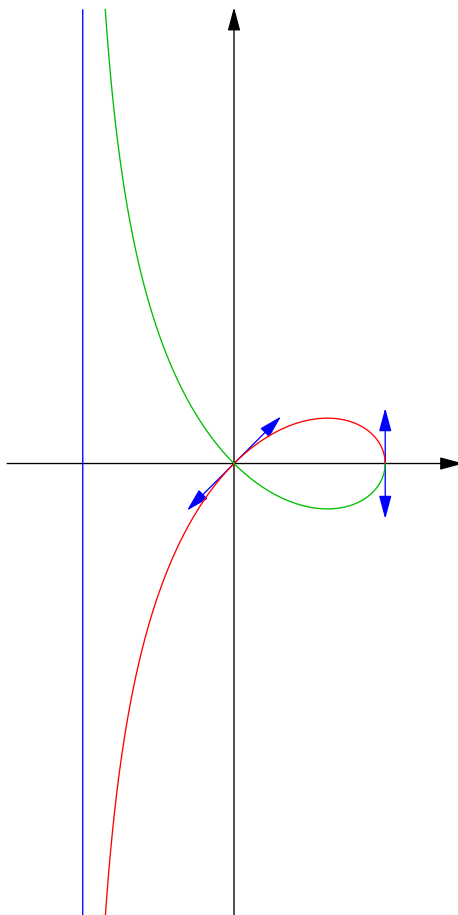
t	0	t_0	1	$+\infty$
$x'(t)$	0	-	-	-1
$y'(t)$	1	+	0	-
$x(t)$	1	$x(t_0)$	0	-1
$y(t)$	0	$y(t_0)$	0	$-\infty$
$\frac{y'(t)}{x'(t)}$	$+\infty$	0	1	

3.4. Tracé du graphe

La valeur approchée de x et de y en t_0 suffit à tracer le graphe compte tenu du point et de sa tangente en $t = 1$.

Le graphe de la partie étudiée est en rouge, la partie complétée par symétrie en vert.

On a aussi tracé, en bleu, la droite d'équation $x = -1$ vers laquelle la courbe se rapproche quand t tend vers $\pm\infty$, ainsi que les deux tangentes pour $t = 0$ et $t = 1$.



4. Courbes planes définies de façon implicite, Lignes de niveau

4.1. Lignes de niveau

Définition : $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La courbe C_λ d'équation $F(x, y) = \lambda$ est l'ensemble des points de $\mathcal{U}$ dont les coordonnées vérifient cette équation. C'est la ligne de niveau de F de hauteur λ .

Définition : Soit $M_0(x_0, y_0)$, un point de C_λ d'équation $F(x, y) = \lambda$.

$$M_0 \text{ est singulier} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)} = \vec{0}$$

4.2. Tangente en un point non singulier

Théorème : Soit $M_0(x_0, y_0)$, un point de C_λ d'équation $F(x, y) = \lambda$, M_0 non singulier.

Alors C_λ admet une tangente en M_0 , normale à $\overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)}$. De plus, ce gradient est dirigé dans le sens des valeurs croissantes de f .

Elle est donc d'équation :

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

En un point singulier, il est possible que C_λ ait une tangente comme il est possible qu'elle n'en ait pas.

Démonstration : On admet que C_λ puisse être paramétrée par t de telle façon que M_0 soit un point régulier correspondant à t_0 .

Alors $\forall t \in I, f(t) = F(x(t), y(t)) = \lambda$, et f est de classe $\mathcal{C}^1$. On dérive, $f'(t_0) = 0$ entraîne

$$x'(t_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + y'(t_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Ce qui prouve que le gradient est normal à la tangente. ■

Exemple : On va chercher l'équation de la tangente au point $(1, 1)$ à l'ellipse d'équation $4x^2 + y^2 = 5$. En $(1, 1)$, le gradient est $(8, 2)$, un vecteur normal à la courbe est donc : $(4, 1)$.

La tangente a donc une équation de la forme $4x + y = k$, et comme elle passe par $(1, 1)$, la tangente est d'équation : $4x + y = 5$.

5. Surfaces définies par une Équation Cartésienne

5.1. Surface d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$

Définition : $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$. $\mathcal{S}$, la surface d'équation

cartésienne $F(x, y, z) = 0$ est l'ensemble des points : $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que : $F(x, y, z) = 0$

Définition : $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$. $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$,

$$M_0 \text{ est dit singulier} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)} = \vec{0}$$

On ne confondra pas les points singuliers d'une surface définie par une équation cartésienne et les points réguliers d'une nappe paramétrée...

5.2. Plan tangent à $\mathcal{S}$ en un point non singulier

Théorème : $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$.

$\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$, M_0 un point non singulier de $\mathcal{S}$.

Alors $\mathcal{S}$ admet un plan tangent en M_0 . Ce plan passe par M_0 et est normal au vecteur $\overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)}$. De plus, ce gradient est dirigé dans le sens des valeurs croissantes de f .

Son équation est donc : $\overrightarrow{M_0 M} \cdot \overrightarrow{\text{Grad}_F(M_0)} = 0$ ou encore : $dF_{M_0} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$

ou enfin : $(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$

La figure 2, ci-dessous, montre le plan tangent et le vecteur normal à une surface.

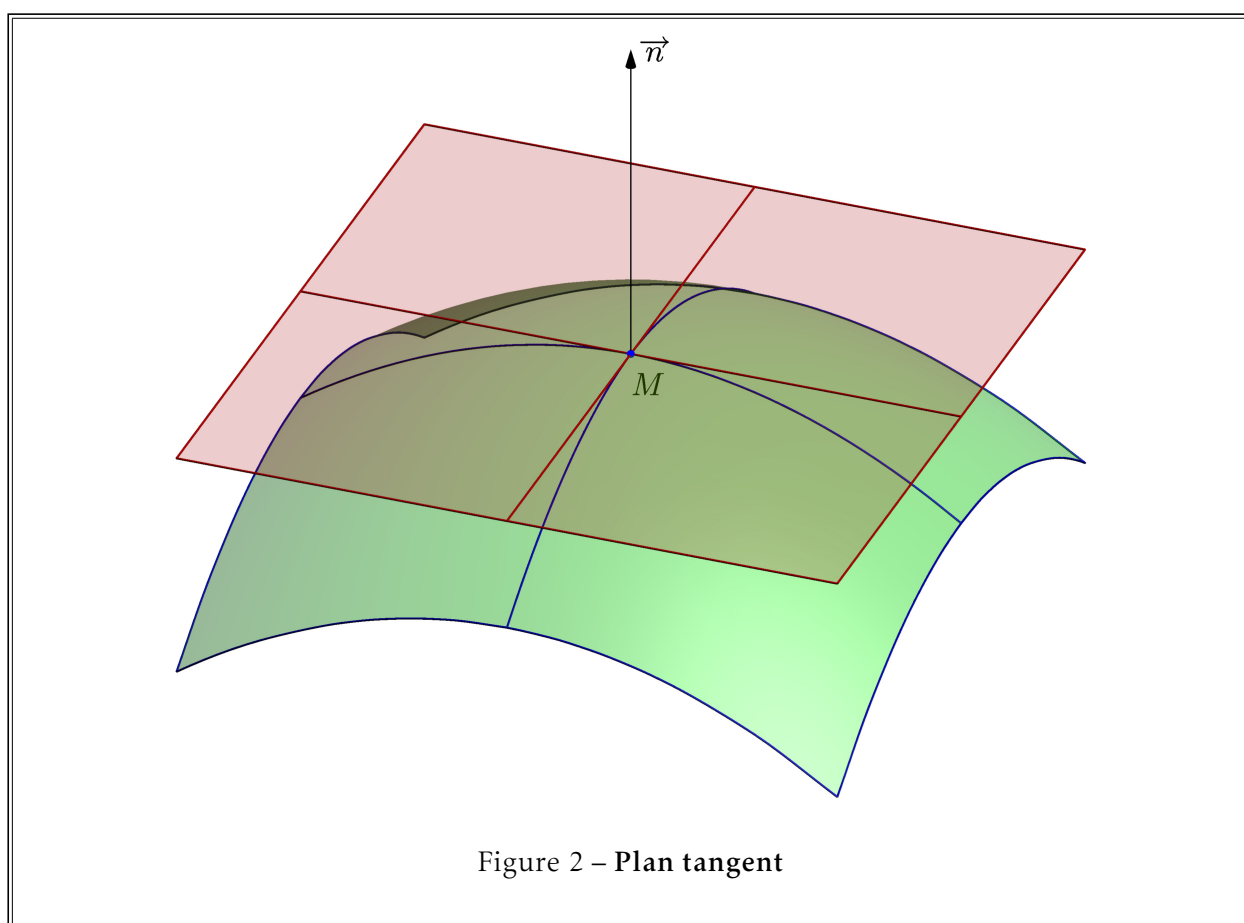


Figure 2 – Plan tangent

Exemple : On reprend la surface d'équation $g(x, y, z) = z - x^2 + y^2 = 0$, et on cherche le plan tangent

en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cette équation est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ au moins. Au point considéré, $\frac{\partial g}{\partial x} = -2$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2$ et $\frac{\partial g}{\partial z} = 1$.

Le plan tangent est donc d'équation $-2(x - 1) + 2(y - 1) + z = 0$, ou encore $2x - 2y - z = 0$.

5.3. Position de la surface par rapport au plan tangent

On considère ici les surfaces d'équation $z = f(x, y)$, le plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0)$, est d'équation :

- $z = z_0$ s'il est horizontal,
- $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ dans le cas contraire.

Remarque : On obtient bien sûr l'équation de ce plan tangent en utilisant le gradient de $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$, gradient qui n'est jamais nul ici !

La position de la surface par rapport au plan tangent se trouve en étudiant, au voisinage de M_0 , le signe de :

- $f(x, y) - z_0$, ou bien,
- $f(x, y) - (\alpha x + \beta y + \gamma)$,

selon le cas.

On a deux cas :

- cette quantité change de signe : la surface traverse le plan tangent, c'est un point « col »,
- cette quantité ne change pas de signe : la surface ne traverse pas le plan tangent, c'est un point « ballon ».

La figure 2, page ci-contre, montre un point en ballon.

La figure 3, ci-dessous, montre un point col.

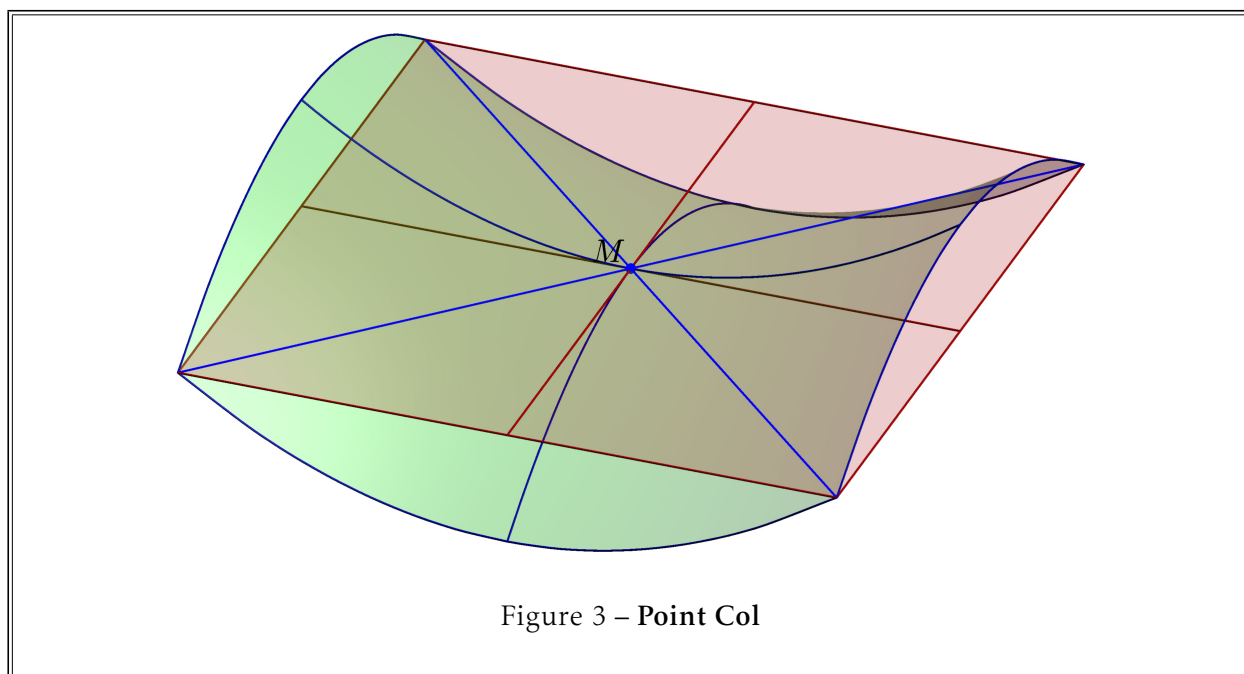


Figure 3 – Point Col