Sommaire

1. Familles de vecteurs 1
1.1. Famille libre 1
1.2. Famille génératrice 1
1.3. Base 2
1.4. Propriétés 2
2. Sous-espaces vectoriels 2
2.1. Somme de sous-espaces vectoriels . . . 2
2.2. Base adaptée 3
2.3. Hyperplan 3
2.4. Sous-espaces stables 3
3. Trace 4
3.1. Trace d'une matrice 4
3.2. Trace de deux matrices semblables . . . 5
3.3. Trace d'un endomorphisme 5
4. Transposée d'une matrice 5
4.1. Transposée 5
4.2. Opérations sur les transposées 6
4.3. Matrices symétriques et antisymétriques 6

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), de dimension finie ou non.
Les différentes parties de ce chapitre, formé de compléments, sont indépendantes.

1. Familles de vecteurs

I désigne un ensemble d'indices, non nécessairement fini. Par exemple $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$...
$\mathscr{F}$ désigne la famille des $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$

1.1. Famille libre

Définition : $\mathscr{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ toute sous-famille finie de $\mathscr{F}$ est libre.
C'est à dire : $\forall \mathrm{J} \subset \mathrm{I}, \mathrm{J}$ finie $\sum\limits_{j\in \mathrm{J}} \alpha_j u_j = 0 \Rightarrow \forall j \in \mathrm{J}, \quad \alpha_j = 0$

Exemple : Dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

Théorème : Toute famille de polynômes non nuls échelonnée en degré est libre.

Démonstration : En fait, cela signifie que les polynômes, non nuls, sont de degrés différents deux à deux.
Si on considère une combinaison linéaire, le coefficient du polynôme de plus haut degré est nécessairement nul !
Et donc tous les coefficients sont nuls, la famille est libre ! ■

1.2. Famille génératrice

Définition : $\mathscr{F}$ est génératrice $\Leftrightarrow$ tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}$.
C'est à dire : $\forall u \in \mathrm{E}, \exists\, \mathrm{J} \subset \mathrm{I}, \mathrm{J}$ finie $\exists \left(\alpha_j\right)_{j\in \mathrm{J}}$ tel que $u = \sum\limits_{j\in \mathrm{J}} \alpha_j u_j$

Exemple : Dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une famille génératrice.

1.3. Base

Définition : $\mathscr{F}$ est une base $\Leftrightarrow \mathscr{F}$ est génératrice et libre.

Exemple : Dans $\mathbb{K}[X]$, $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc aussi une base de $\mathbb{K}[X]$.
C'est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Théorème : Plus généralement, dans $\mathbb{K}[X]$, une famille étagée complète, c'est à dire une famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec P_k de degré k, est aussi une base de $\mathbb{K}[X]$.

1.4. Propriétés

- Ceci étend bien les définitions en dimension finie.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
- $\varphi : E \to F$ linéaire, $(u_i)_{i\in I}$ génératrice de $E \Rightarrow (\varphi(u_i))_{i\in I}$ est génératrice de $\mathrm{Im}(E)$

Théorème : $\left.\begin{array}{r} (u_i)_{i\in I} \text{ libre} \\ (u, (u_i)_{i\in I}) \text{ liée} \end{array}\right\} \Rightarrow u$ est combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$

Démonstration : Une liaison contenant des coefficients non nuls contient nécessairement u avec un coefficient non nul...
On écrit : $\lambda\, u + \sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u_i = 0$
Si $\lambda = 0$, alors $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u_i = 0$, mais comme cette famille est libre, chaque λ_i est nul, ce qui est impossible.
Si $\lambda \neq 0$, alors : $u = \dfrac{-\sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, u_i}{\lambda}$, ce qui prouve le résultat annoncé. ■

Théorème : L'image d'une famille libre par une application linéaire **injective** est libre.

Démonstration : $\sum\limits_{j\in J} \alpha_j\, \varphi\left(u_j\right) = 0 \Rightarrow \varphi\left(\sum\limits_{j\in J} \alpha_j\, u_j\right) = 0 \Rightarrow \sum\limits_{j\in J} \alpha_j\, u_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, \alpha_j = 0$ ■

2. Sous-espaces vectoriels

2.1. Somme de sous-espaces vectoriels

Définition : E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ des sous-espaces vectoriels, la *somme* F de ces sous-espace est :
$F = \{u \in E,\ u = u_1 + u_2 + \cdots + u_n;\ u_1 \in F_1, u_2 \in F_2, \ldots, u_n \in F_n\}$
On la note : $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$.

Définition : Si, de plus, les u_i sont uniques, on dit que la somme F est *directe*.
On la note alors : $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Définition : On dit q ue F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si et seulement si $E = F_1 \oplus F_2$.

2.2. En dimension fine, base adaptée à une somme directe

Théorème : En dimension finie, si $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$, on obtient une base de F en mettant bout à bout les bases de $F_1, F_2, \ldots, F_n$.
Cette base est appelée *base adaptée* de F à la somme directe.

Démonstration : On va le montrer pour $n = 2$, $F = F_1 \oplus F_2$, mais le principe de la démonstration reste de même.
On considère donc une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs, obtenue en mettant bout à bout une base $\mathscr{F}_1$ de F_1 et une base $\mathscr{F}_2$ de F_2 ; $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2$.
On va d'abord montrer que $\mathscr{F}$ est génératrice.
Soit $u \in F$, alors, $u = u_1 + u_2$, avec $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$.
Donc $u_1 \in \text{Vect}(\mathscr{F}_1) \subset \text{Vect}(\mathscr{F})$ et $u_2 \in \text{Vect}(\mathscr{F}_2) \subset \text{Vect}(\mathscr{F})$.
Ce qui prouve que $u \in \text{Vect}(\mathscr{F})$. La famille est bien génératrice.
On va maintenant montrer que la famille est libre. On utilise les mêmes notations.
Si $u = 0$, avec $u = u_1 + u_2$, alors $u_1 = u_2 = 0$, puisque la somme est directe.
$u_1 = 0$ prouve que ses coefficients dans la base $\mathscr{F}_1$ sont nuls, de même, $u_2 = 0$ prouve que ses coefficients dans la base $\mathscr{F}_2$ sont nuls.
Comme les coefficients de u dans la famille $\mathscr{F}$ sont ceux de u_1 dans la base $\mathscr{F}_1$ puis ceux de u_2 dans la base $\mathscr{F}_2$, ils sont tous nuls.
La famille est bien libre, ce qui termine la démonstration. ■

2.3. Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition : E un espace vectoriel de dimension n,
F est un *hyperplan* de E $\Leftrightarrow$ F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

Théorème : E, de dimension n, étant muni d'une base $\mathscr{B}$,
F est un hyperplan de E $\Leftrightarrow$ F admet une équation du type $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$,
avec, bien sûr, les a_i non tous nuls.

Démonstration : L'application qui, à u, de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\mathscr{B}$,
associe : $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$ est linéaire de rang 1, son noyau est donc de dimension $n - 1$, ce qui prouve la réciproque.
Pour le sens direct, considérons une base de F, de dimension $n - 1$, qu'on complète par un n-ème vecteur pour obtenir une base $\mathscr{B}'$ de E.
Dans cette base, l'équation de F est $x'_n = 0$. Les formules de changement de base nous donnent
$x'_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$ où les a_i sont la dernière ligne de l'inverse de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$.
Ce qui démontre l'implication dans le sens direct. ■

Exemple : En dimension 2, les hyperplans sont les droites vectorielles !
En dimension 3, les hyperplans sont simplement les plans.

Théorème : F est un hyperplan de E si et seulement si les supplémentaires de F dont des droites vectorielles.

2.4. Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition : E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, φ un endomorphisme de E, F un sous-espace vectoriel de E.
F est *stable* par $\varphi \Leftrightarrow \forall u \in F,\ \varphi(u) \in F$

Définition : $A_1 \in \mathscr{M}_{p_1}(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathscr{M}_{p_2}(\mathbb{K})$,..., $A_k \in \mathscr{M}_{p_k}(\mathbb{K})$, et les O sont des matrice (en général rectangulaires) nulles, avec bien sûr : $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$.

Alors, $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$ est *diagonale par blocs*.

Théorème : E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, φ un endomorphisme de E,
$F_1, F_2, \ldots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E, stables par φ,
tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_K$, alors, dans une base adaptée à cette somme directe,
alors la matrice de φ est de la forme : $\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$

Remarque : Les A_i sont les matrices des restrictions de φ aux F_i, dans leurs bases respectives !

Exemple : Lorsqu'on fait, dans le plan, une projection orthogonale par rapport à une droite $\mathscr{D}$, cette droite et la droite orthogonale sont stables par cette projection.
On a la même chose pour la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
Mieux, dans l'espace, on la même chose pour une projection ou une symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathscr{D}$ ou le plan $\mathscr{P}$.

3. Trace d'un endomorphisme et d'une matrice

3.1. Trace d'une matrice

Définition : La trace d'une matrice, notée tr (A), est la somme des éléments diagonaux. avec les notations classiques, pour une matrice $n \times n$, on a :

$tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Exemple : La trace de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ est $1 + 4 + 7 = 12$.

Théorème : L'application : $\mathrm{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui à M associe tr (M) est linéaire.
C'est donc une forme linéaire de $\mathbb{K}$.

Démonstration : $\mathrm{tr}\,(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ et $\mathrm{tr}\,(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}$

Par ailleurs, avec λ et μ dans $\mathbb{K}$, les éléments de $\lambda A + \mu B$ sont : $\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}$ et donc :

$$\mathrm{tr}\,(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii} + \mu a_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \lambda\,\mathrm{tr}\,(A) + \mu\,\mathrm{tr}\,(B) \qquad \blacksquare$$

3.2. Trace de deux matrices semblables

Théorème : A, B deux matrices $n \times n$, alors,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$$

Démonstration : L'élément $i^{ème}$ ligne et colonne de AB est $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji}$,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, a_{ji} = \mathrm{tr}(\mathrm{BA})$$

car les indices de sommation sont muets. ■

Théorème : 2 matrices semblables ont la même trace.

La réciproque est fausse !

Démonstration : $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A}') = \mathrm{tr}\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{AP})\right) = \mathrm{tr}\left((\mathrm{AP})\,\mathrm{P}^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{APP}^{-1}\right) = \mathrm{tr}(\mathrm{A})$$ ■

Exemple : Les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ ne diffèrent que par l'interversion des deux premières colonnes mais ne sont pas semblables puisqu'elles n'ont pas la même trace !...

3.3. Trace d'un endomorphisme en dimension finie

Définition : Comme deux matrices semblables ont la même trace, la trace d'un endomorphisme en dimension finie est définie comme la trace de sa matrice dans n'importe quelle base.

4. Transposée d'une matrice

4.1. Transposée

Définition : Soit A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, c'est à dire une matrice à n lignes et p colonnes.
La *transposée* de A, notée ${}^t\mathrm{A}$, ou A^T est une matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, c'est à dire une matrice à p lignes et n colonnes.
Son élément i-ème ligne et j-ème colonne est l'élément j-ème ligne et i-ème colonne de A, souvent noté $a_{i,j}$.

En pratiques, les lignes de A deviennent les colonnes de A^T, tandis que les colonnes de A deviennent les lignes de A^T.

Par exemple, la transposée de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, tandis que la transposée de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque : La transposée de la transposée est la matrice elle-même !
Autrement dit : $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a : $\left(\mathrm{A}^\mathrm{T}\right)^\mathrm{T} = \mathrm{A}$.

Remarque : Si U et V sont des vecteurs colonnes à n composantes, alors $\mathrm{U}^\mathrm{T} \times \mathrm{V}$ est une matrice à une ligne et une colonne, c'est à dire un scalaire !
En dimension 2 ou 3, dans une base orthonormale, c'est même le produit scalaire de ces deux vecteurs.

4.2. Opérations sur les transposées

Théorème : (Linéarité de la transposition)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors : $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.

Démonstration : L'élément ligne i et colonne j de $(\lambda A + \mu B)^T$ est l'élément ligne j et colonne i de $\lambda A + \mu B$, c'est à dire $\lambda a_{j,i} + \mu b_{j,i}$.
L'élément ligne i et colonne j de A^T est l'élément ligne j et colonne i de A, c'est à dire $a_{j,i}$.
L'élément ligne i et colonne j de B^T est l'élément ligne j et colonne i de B, c'est à dire $b_{j,i}$.
Donc, l'élément ligne i et colonne j de $\lambda A^T + \mu B^T$ est $\lambda a_{j,i} + \mu b_{j,i}$.
On a donc bien l'égalité annoncée. ■

Théorème : (Transposée d'un produit)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On sait alors que $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
De plus, on a : $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.

On remarquera l'inversion de l'ordre des termes du produit...
Démonstration : L'élément ligne i et colonne j de $(A \times B)^T$ est l'élément ligne j et colonne i de $A \times B$.
C'est donc le « produit » de la ligne j de A par la colonne i de B, ou encore $\sum_{k=1}^{p} a_{j,p} b_{p,i}$.
L'élément ligne i et colonne j de $B^T \times A^T$ est le « produit » de la ligne i de B^T par la colonne j de A^T, c'est à dire le « produit » de la colonne i de B par la ligne j de A^T, ou encore $\sum_{k=1}^{p} b_{p,i} a_{j,p}$.
On a bien montré l'égalité demandée demandée. ■

Théorème : (Transposée de l'inverse)
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire une matrice carrée inversible d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Alors : $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Démonstration : On applique le théorème précédent avec une matrice A carrée inversible et $B = A^{-1}$.
On a donc : $\left(A \times A^{-1}\right)^T = I_n^T = I_n = \left(A^{-1}\right)^T \times A^T$, en notant classiquement I_n la matrice identité d'ordre n.
Ce qui prouve que $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$. ■

4.3. Matrices symétriques et antisymétriques

Définition : Une matrice carrée A est *symétrique* si et seulement si $A^T = A$.
Cela revient à ce que les éléments ligne i et colonne j sont égaux aux éléments ligne j et colonne i.

Par exemple, dans le plan, la matrice dans une base orthonormale d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite est symétrique.
Autre exemple : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique.

Définition : Une matrice carrée A est *antisymétrique* si et seulement si $A^T = -A$.
Cela revient à ce que les éléments ligne i et colonne j sont les opposés des éléments ligne j et colonne i.

Par exemple, dans le plan, la matrice dans une base orthonormale d'une rotation est antisymétrique.
Autre exemple : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Théorème : L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n, noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, muni de la somme des matrices et du produit d'une matrice par un scalaire, a une structure d'espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Il est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$

Théorème : L'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n, noté $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, muni de la somme des matrices et du produit d'une matrice par un scalaire, a une structure d'espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Il est de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Pour ces deux théorèmes, la stabilité par combinaison linéaire se montre facilement en utilisant la linéarité de la transposition.

Théorème : (**Décomposition canonique**) Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors il existe une unique matrice symétrique S et une unique matrice antisymétrique A telle que $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$.

> Cela revient à la propriété suivante : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration : Si $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$, alors $\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{S}^{\mathrm{T}} + \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{S} - \mathrm{A}$.
Donc, nécessairement, $\mathrm{S} = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{M} + \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\right)$ et $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{M} - \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\right)$.
La somme de ces deux matrices est bien M, il suffit enfin de vérifier que $\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{M} + \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\right)$ est symétrique et que $\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{M} - \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\right)$ est symétrique, ce qui est très facile en utilisant la linéarité de la transposition et la transposée de la transposée. ■