

Chapitre 7

Séries entières

Exercice 1 : On note R le rayon de convergence de la série entière S étudiée.

(i) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^2 3^n}{3^{n+1} n^2} |z| = \frac{(n+1)^2}{3n^2} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|}{3} = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :

- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 3$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 3$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 3$.

(ii) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = e^{-2n-1} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \ell.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\ell < 1$, donc la série S converge absolument. On conclut que $R = +\infty$.

(iii) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \frac{n^2}{\ln(n)} |z|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|^2 = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :

- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1$.

(iv) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} |z|^3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n |z|^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e |z|^3 = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :

- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < e^{-1/3}$, alors S converge absolument.
 - Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > e^{-1/3}$, alors S diverge grossièrement.
- On conclut que $R = e^{-1/3}$.

(v) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)!}{n!} |z| = (n+1) |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty = \ell.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\ell > 1$, donc la série S diverge grossièrement. On conclut que $R = 0$.

(vi) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \binom{2n+2}{n+1} \binom{2n}{n}^{-1} |z|^4 = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} |z|^4 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4 |z|^4 = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :

- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 2^{-1/2}$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 2^{-1/2}$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 2^{-1/2}$.

(vii) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|2 + i(n+1)|}{|2 + in|} |z| = \frac{\sqrt{4 + (n+1)^2}}{\sqrt{4 + n^2}} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z| = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :

- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1$.

(viii) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|n+1+i|}{|2+i(n+1)|} \frac{|2+in|}{|n+i|} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z| = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :

- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1$, alors S converge absolument.

- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1$.

(ix) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|1+i|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \frac{n2^n}{|1+i|^n} |z|^3 = \frac{\sqrt{2}n}{(n+1)2} |z|^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^3}{\sqrt{2}} = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :

- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 2^{1/6}$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 2^{1/6}$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 2^{1/6}$.

(x) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} \frac{(n!)^3}{(3n)!} |z|^3 = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} |z|^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 27|z|^3 = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :

- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1/3$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1/3$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1/3$.

(xi) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} \frac{(n!)^3}{(3n)!} |z|^3 = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} |z|^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 27|z|^3 = \ell.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :

- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1/3$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1/3$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1/3$.

(xii) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|^{(n+1)^2}}{|z|^{n^2}} = |z|^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ 1 & \text{si } |z| = 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :

- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1$.

(xiii) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|^{(n+1)!}}{|z|^{n!}} = |z|^{n \cdot n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ 1 & \text{si } |z| = 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}.$$

On en déduit avec la règle de d'Alembert :

- Si $\ell < 1$, ce qui équivaut à $|z| < 1$, alors S converge absolument.
- Si $\ell > 1$, ce qui équivaut à $|z| > 1$, alors S diverge grossièrement.

On conclut que $R = 1$.

Exercice 2 : Notons $a_n = n^{(-1)^n}$ et R le rayon de convergence de la série entière que l'on étudie. On a l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \frac{|x|^n}{n} \leq a_n |x|^n \leq n|x|^n.$$

De plus, on remarque avec la règle de d'Alembert que les séries entières $\sum x^n/n$ et $\sum nx^n$ ont pour rayon de convergence 1.

- Si $|x| > 1$, alors la série $\sum |x|^n/n$ diverge, donc $\sum a_n |x|^n$ diverge par comparaison. Ainsi $R \leq 1$.
- Si $|x| < 1$, alors la série $\sum n|x|^n$ converge, donc $\sum a_n |x|^n$ converge par comparaison. Ainsi $R \geq 1$.

On conclut que $R = 1$.

Exercice 3 : Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

De plus, l'égalité précédente reste valable pour $x = 0$. Comme f s'écrit sous la forme d'une série entière, on en déduit d'après le cours que f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 4 : Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

On prolonge f à \mathbb{R} en posant $f(0) = 1$. L'égalité précédente reste valable pour $x = 0$. Comme f s'écrit sous la forme d'une série entière, on en déduit d'après le cours que f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 5 :

(i) Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$a^x = e^{x \ln(a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln^n(a) \frac{x^n}{n!}.$$

L'expression précédente étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{a+x} = e^a \cdot e^x = e^a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^a \frac{x^n}{n!}.$$

L'expression précédente étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

(iii) Pour tout $x \in]-a, a[$, on a

$$\ln(a+x) = \ln(a) + \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \ln(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{na^n} x^n.$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est a .

(iv) Pour tout $x \in]-a, a[$, on a

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-(x/a)} = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}.$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est a .

Exercice 6 : On note f la fonction que l'on souhaite développer en série entière.

(i) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = e^x \cos(x) = \operatorname{Re}(e^{(1+i)x})$, donc

$$f(x) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) x^n.$$

L'égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence est $+\infty$.

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

L'égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence est $+\infty$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en linéarisant \sin^3 , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^3(x) = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x) \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{4} - \frac{3^{2n+1}}{4} \right) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

L'égalité étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence est $+\infty$.

(iv) Pour $x \in]-1, 1[$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 - 3x + 2) = \ln((2-x)(1-x)) = \ln(2-x) + \ln(1-x) \\ &= \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \ln(1-x) \\ &= \ln(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \ln(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right) \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est 1.

(v) Pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$f(x) = (1+x) \cdot \frac{1}{1-x} = (1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1}.$$

En effectuant un changement d'indice $k = n + 1$ dans la seconde somme et en sortant le premier terme dans la première somme, on obtient

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2x^n.$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est 1.

(vi) On remarque que pour $x \in]-2, 2[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x/2)} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+(x/3)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n. \end{aligned}$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est 2.

(vii) Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{1+x} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\left(\frac{-1}{2} \right) \cdot \left(\frac{-3}{2} \right) \cdots \left(\frac{-2n+1}{2} \right) \right) (-x^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}. \end{aligned}$$

Or, on a

$$1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!},$$

donc en substituant dans l'expression précédente, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^{2n}.$$

Finalement, on a

$$f(x) = (1+x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} (x^{2n} + x^{2n+1}).$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est 1.

(viii) Pour $x \in]-1, 1[$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 + x + 1) = \ln\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} x^n. \end{aligned}$$

où la suite (a_n) est définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ n'est pas un multiple de } 3 \\ -2 & \text{si } n \text{ est un multiple de } 3 \end{cases}$$

On vérifie avec la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de cette série entière est 1.

Exercice 7 :

1. Remarquons que $j^3 = 1$. On distingue trois cas.

- Si $n = 3p$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors

$$1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3p} + j^{6p} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

- Si $n = 3p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors

$$1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3p+1} + j^{6p+2} = 1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0.$$

- Si $n = 3p + 2$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors

$$1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3p+2} + j^{6p+4} = 1 + j^2 + j = \frac{1-j^3}{1-j} = 0.$$

Finalement, on a montré que

$$1 + j^n + j^{2n} = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est un multiple de } 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. D'après le cours et la question précédente, on a

$$e^x + e^{jx} + e^{j^2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + j^n + j^{2n}) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3x^{3n}}{(3n)!}$$

qui est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. En prenant $x = 1$ dans la relation précédente, on en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1 + e^j + e^{j^2}}{3} = \frac{1}{3} \left(e + 2e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right).$$

Exercice 8 : La fonction $f : t \mapsto e^{t^2}$ se développe en série entière

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!}.$$

Comme $[0, 1]$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $] -\infty, +\infty[$ de la série entière, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme

$$\int_0^1 e^{t^2} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}.$$

Exercice 9 :

1. La fonction $f : t \mapsto 1/(1+t^2)$ se développe en série entière

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}.$$

Soit $x \in]-1, 1[$. Comme $[0, x]$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $] -1, 1[$ de la série entière, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan}(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}. \end{aligned}$$

2. D'après le cours, le coefficient d'indice n dans le développement en série entière de Arctan est $\operatorname{Arctan}^{(n)}(0)/n!$. On en déduit que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Arctan}^{(2p)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan}^{(2p+1)}(0) = (-1)^p (2p)!.$$

Exercice 10 :

1. Soit $x \in]-1, 1[$. D'après le cours, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1-x)^{-1/2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\binom{-1}{2} \cdot \binom{-3}{2} \cdots \binom{-2n+1}{2} \right) (-x)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} x^n. \end{aligned}$$

Or, on a

$$1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!},$$

donc en substituant dans l'expression précédente, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^n.$$

D'après le cours, le rayon de convergence de cette série entière est 1.

2. La fonction $f : t \mapsto 1/\sqrt{1-t^2}$ se développe en série entière

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} t^{2n}.$$

Soit $x \in]-1, 1[$. Comme $[0, x]$ est inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $] -1, 1[$ de la série entière, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin}(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}. \end{aligned}$$

Comme une série entière et sa dérivée ont le même rayon de convergence, le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est 1.

3. On peut remplacer x par $1/2 \in]-1, 1[$ dans l'expression précédente. On obtient

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)}.$$

On obtient le résultat en multipliant l'égalité précédente par 6.

Exercice 11 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 \leq H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

2. On déduit de la question précédente l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq |x|^n \leq H_n |x|^n \leq n|x|^n.$$

Les séries entières $\sum x^n$ et $\sum nx^n$ ont pour rayon de convergence 1.

- Si $|x| > 1$, alors la série $\sum |x|^n$ diverge, donc $\sum H_n |x|^n$ diverge par comparaison. Ainsi $R \leq 1$.
- Si $|x| < 1$, alors la série $\sum n|x|^n$ converge, donc $\sum H_n |x|^n$ converge par comparaison. Ainsi $R \geq 1$.

On conclut que $R = 1$.

3. Pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} (1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} H_{n-1} x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{+\infty} (H_n - H_{n-1}) x^n = x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x). \end{aligned}$$

4. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on en déduit que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad S(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 12 :

1. On a l'inégalité

$$0 \leq \left| \frac{\sin(n\theta)x^n}{n!} \right| \leq \frac{|x|^n}{n!}.$$

Or $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ est la série entière de la fonction exponentielle, donc elle converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que la série $\sum \frac{|\sin(n\theta)|}{n!} |x|^n$ converge par comparaison pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le rayon de convergence de S est $+\infty$.

2. En utilisant la formule de d'Euler, on a

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in\theta} x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-in\theta} x^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\exp(xe^{i\theta}) + \exp(xe^{-i\theta}) \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\exp(xe^{i\theta}) \right) \\ &= \exp(x \cos(\theta)) \sin(x \sin(\theta)). \end{aligned}$$

Exercice 13 : On note $f(x)$ la série entière étudiée et R son rayon de convergence.

(i) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = +\infty$, donc on calcule f sur \mathbb{R} . On a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x \exp'(x) - \exp(x) = (x-1) \exp(x).$$

(ii) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $] -1, 1[$. Pour $x \in] -1, 1[$ non nul, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

On conclut que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

(iii) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = +\infty$, donc on calcule f sur \mathbb{R} . On a

$$f(x) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x/2)^n}{n!} = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

(iv) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $] - 1, 1[$.

La dérivée de la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est

$$g'(x) = \sum_{n \geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right).$$

Comme $g(0) = 0$, on en déduit que

$$g(x) = \frac{-\ln(1-x) + \ln(1+x)}{2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

puis avec $g(x) = xf(x)$, on conclut que

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(v) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $] - 1, 1[$.

En dérivant sur $] - 1, 1[$ la relation

$$\frac{1}{1+X} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n X^n,$$

on obtient que

$$\frac{1}{(1+X)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n X^{n-1}.$$

On en déduit en posant $X = x^2$ et en multipliant par x^3 que

$$f(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

(vi) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $] - 1, 1[$.

En écrivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{x^2-1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}. \end{aligned}$$

En reprenant le résultat de (iv), on conclut que

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{x^2-1}{4x} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(vii) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $] - 1, 1[$.

En notant

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x^2 S''(x) + x S'(x).$$

On conclut que

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(viii) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = 1$, donc on calcule f sur $] - 1, 1[$.

En notant

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

on a pour x non nul

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = -1 + x^2 S'(x) - \frac{2 \ln(1-x)}{x}.$$

On conclut que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \begin{cases} -1 + \frac{x^2}{(1-x)^2} - \frac{2\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(ix) Avec la règle de d'Alembert, on a $R = +\infty$, donc on calcule f sur \mathbb{R} . En écrivant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n,$$

on obtient

$$f(x) = x^3 \exp'''(x) + 3x^2 \exp''(x) + x \exp'(x) = (x^3 + 3x^2 + x) \exp(x).$$

Exercice 14 :

1. En effectuant le changement de variable $t = -u$ dans l'intégrale définissant $f(x)$, on trouve que $f(-x) = -f(x)$, donc f est impaire.

2. On a

$$f(0) = \exp(0) \int_0^0 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 \times 0 = 0.$$

D'autre part, la fonction $x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2/2) dt$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \exp(-t^2/2)$. Ainsi, la fonction f est un produit de fonction dérivable, donc elle est dérivable et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt + \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &= x f(x) + 1. \end{aligned}$$

3. D'après le cours la fonction h est dérivable et sa dérivée est donnée par

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n}.$$

En substituant dans (E), on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} &= x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} \right) + 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} \right) + 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{2n} \right) + 1. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, cette égalité équivaut à l'égalité des coefficients, d'où

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (2n+1) a_n = a_{n-1}.$$

On montre par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}_n : a_n = \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdots 3 \cdots 1} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}.$$

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $a_0 = 1 = \frac{2^0 0!}{1!}$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété \mathcal{P}_n est vraie. Alors, on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2n+3} a_n = \frac{1}{2n+3} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} = \frac{2^n n! (2n+2)}{(2n+3)!} \\ &= \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(2(n+1)+1)!}, \end{aligned}$$

donc la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie. On conclut que la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Finalement, on vérifie que la série entière obtenue est convergente. On applique la règle de d'Alembert. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{|a_{n+1} x^{2(n+1)+1}|}{|a_n x^{2n+1}|} = \frac{a_{n+1}}{a_n} x^2 = \frac{1}{2n+3} x^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \ell.$$

La série converge si $\ell < 1$ et diverge si $\ell > 1$. Dans ce cas, on a toujours $\ell < 1$, donc la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc le rayon de convergence est $+\infty$.

4. D'après la question précédente, la fonction

$$h : x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

est définie sur \mathbb{R} , est solution de (E) et vérifie $h(0) = 1$. Or la fonction f est aussi solution de (E) et vérifie aussi $f(0) = 1$, donc par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, on a $f = h$.