Chapitre 11
Probabilités sur un univers fini

Exercice 1 :

1. On a 52 tirages différents possibles.
2. On se trouve dans une situation d'équiprobabilité, donc il suffit de compter le nombre de cas favorable. Or il y a 4 rois, donc la probabilité est 4/52.
3. Il y a 13 cœurs, donc la probabilité est 13/52.
4. Cela revient à tirer le roi de cœur, donc la probabilité est 1/52.
5. On note R l'évènement tiré un roi et C l'évènement tiré un cœur. On a
$$P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}.$$
6. On se trouve à nouveau dans une situation d'équiprobabilité, mais le nombre de tirages différents est
$$\binom{52}{2} = \frac{52 \times 51}{2} = 1326.$$
On note R l'évènement avoir au moins un roi dans sa main. Avoir une main avec exactement un roi revient à dire quelle est ce roi et quelle est la seconde carte. Si on a deux rois, il suffit de dire quelles sont ces deux rois. Ainsi,
$$P(R) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{1} + \binom{4}{2}}{1326} = \frac{198}{1326}.$$
On note C l'évènement avoir au moins un cœur dans sa main. En décomposant selon que l'on a exactement un cœur ou deux cœurs, on obtient
$$P(C) = \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{1} + \binom{13}{2}}{1326} = \frac{585}{1326}.$$
On distingue le cas où on a le roi de cœur dans la main du cas où on ne l'a pas. On obtient
$$P(R \cap C) = \frac{\binom{51}{1} + \binom{3}{1}\binom{12}{1}}{1326} = \frac{87}{1326}.$$
Pour terminer, on utilise comme avant
$$P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) = \frac{198 + 585 - 87}{1326} = \frac{696}{1326}.$$

Exercice 2 :

1. Le nombre de tirages différents est $\binom{52}{5} = 2\ 598\ 960$.
2. On se trouve dans une situation d'équiprobabilité, donc il suffit de compter le nombre de cas favorable. Une main avec une suite couleur revient à donner la couleur et la plus haute carte de la suite qui est dans $\{5, 6, \dots, Roi, As\}$, donc la probabilité est
$$\binom{4}{1}\binom{10}{1}\Big/\binom{52}{5} = \frac{40}{2\ 598\ 960} \simeq 0,015\%.$$
3. Une main avec un carré revient à donner la hauteur des cartes composant le carré et la dernière carte, donc la probabilité est
$$\binom{13}{1}\binom{48}{1}\Big/\binom{52}{5} = \frac{624}{2\ 598\ 960} \simeq 0,024\%.$$
4. Une main avec un full revient à donner la hauteur du brelan avec les symboles des trois cartes et la hauteur de la paire avec les symboles des deux cartes, donc la probabilité est
$$\left(\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}\right)\Big/\binom{52}{5} = \frac{3\ 744}{2\ 598\ 960} \simeq 0,14\%.$$
5. Une main avec une couleur revient à donner le symbole des cartes et les cinq hauteurs de cartes choisies (qui ne doivent pas se suivre, sinon on a une suite couleur), donc la probabilité est
$$\left(\binom{4}{1}\binom{13}{5} - \binom{4}{1}\binom{10}{1}\right)\Big/\binom{52}{5} = \frac{5\ 108}{2\ 598\ 960} \simeq 0,2\%.$$

6. Une main avec une suite revient à donner la plus haute carte de la suite et les symboles des cartes (qui ne doivent pas être tous identique, sinon on a une suite couleur), donc la probabilité est

$$\left(\binom{10}{1}\binom{4}{1}^5 - \binom{10}{1}\binom{4}{1}\right) \bigg/ \binom{52}{5} = \frac{10\ 200}{2\ 598\ 960} \simeq 0,39\%.$$

7. Une main avec un brelan revient à donner la hauteur du brelan avec les symboles des trois cartes et les deux cartes (qui ne doivent pas avoir la même hauteur, sinon on a un full), donc la probabilité est

$$\left(\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{2}\right) \bigg/ \binom{52}{5} = \frac{54\ 912}{2\ 598\ 960} \simeq 2,11\%.$$

8. Une main avec une double paire revient à donner la hauteur des deux paires avec les symboles des cartes de chacune des paires, puis la dernière carte (qui ne doit pas avoir la même hauteur qu'une des deux paires, sinon on a un full), donc la probabilité est

$$\left(\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{44}{1}\right) \bigg/ \binom{52}{5} = \frac{123\ 552}{2\ 598\ 960} \simeq 4,75\%.$$

9. Une main avec une paire revient à donner la hauteur de la paire avec les symboles des deux cartes, puis à choisir trois cartes (qui ne doivent pas former une autre combinaison), donc la probabilité est

$$\left(\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}^3\right) \bigg/ \binom{52}{5} = \frac{1\ 098\ 240}{2\ 598\ 960} \simeq 42,26\%.$$

10. Il suffit de retrancher tout les autres cas au nombre de cas total, donc la probabilité est

$$\frac{1\ 302\ 540}{2\ 598\ 960} \simeq 50,11\%.$$

Exercice 3 : Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, notons B_i l'évènement « la i-ième boule tirée est blanche ». On utilise la formule des probabilités composées

$$P(B_1 \cap \overline{B_2} \cap B_3) = P(B_1)P(\overline{B_2} \mid B_1)P(B_3 \mid B_1 \cap \overline{B_2}) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{60}{504}.$$

Exercice 4 :

1. Notons A_i l'évènement « on tire une boule blanche et une boule rouge au i-ième tirage ». On utilise la formule des probabilités composées

$$p_n = P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Lors du premier tirage, on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. Le nombre d'issues total est $\binom{2n}{2}$, tandis qu'il y a $\binom{n}{1}^2$ issues dans A_1. En itérant, on trouve

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\binom{n}{1}^2}{\binom{2n}{2}} \times \frac{\binom{n-1}{1}^2}{\binom{2(n-1)}{2}} \times \cdots \times \frac{\binom{1}{1}^2}{\binom{2}{2}} \\ &= \frac{2n^2}{2n(2n-1)} \times \frac{2(n-1)^2}{(2n-2)(2n-3)} \times \cdots \times \frac{2 \times 1^2}{2} \\ &= \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}. \end{aligned}$$

2. On remarque que

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

donc d'après le critère de d'Alembert, la série $\sum p_n$ converge, donc la suite (p_n) converge vers 0. C'est intuitif : si le nombre de boules est très grand, il est très peu probable de tirer à chaque fois une boule blanche et une boule rouge.

Exercice 5 :

1. Notons B l'évènement « on a tiré une boule blanche » et A_i l'évènement « on a transféré i boules blanches de l'urne B dans l'urne A ». On a

$$P(A_0) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{28}{66}, \quad P(A_1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{32}{66}, \quad P(A_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{6}{66}.$$

On utilise la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A_0)P(A_0) + P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) \\ &= \frac{6}{13} \times \frac{28}{66} + \frac{7}{13} \times \frac{32}{66} + \frac{8}{13} \times \frac{6}{66} \\ &= \frac{440}{858} = \frac{220}{429} \simeq 51,28\%. \end{aligned}$$

2. On utilise la formule de Bayes

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \mid B) &= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) \\ &= \frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{P(B)} + \frac{P(B \mid A_2)P(A_2)}{P(B)} \\ &= \frac{858}{440} \times \frac{7}{13} \times \frac{32}{66} + \frac{858}{440} \times \frac{8}{13} \times \frac{6}{66} \\ &= \frac{272}{440} = \frac{34}{55} \simeq 61,82\%. \end{aligned}$$

Exercice 6 :

1. Notons M l'évènement « la personne est malade » et T l'évènement « le test est positif ». Par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \mid M)P(M) + P(T \mid \bar{M})P(\bar{M}) \\ &= 0,99 \times 10^{-4} + 10^{-3} \times (1 - 10^{-4}), \end{aligned}$$

puis avec la formule de Bayes

$$P(M \mid \bar{T}) = \frac{P(\bar{T} \mid M)P(M)}{P(\bar{T})} = \frac{0,01 \times 10^{-4}}{1 - P(T)} \simeq 0,001\%.$$

2. On utilise la formule de Bayes

$$P(M \mid T) = \frac{P(T \mid M)P(M)}{P(T)} = \frac{0,99 \times 10^{-4}}{P(T)} \simeq 9,01\%.$$

Exercice 7 :

1. Notons D l'évènement « le produit est défectueux » et C l'évènement « l'article passe le contrôle ». La probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est

$$\begin{aligned} P((D \cap C) \cup (\bar{D} \cap \bar{C})) &= P(D \cap C) + P(\bar{D} \cap \bar{C}) \\ &= P(C \mid D)P(D) + P(\bar{C} \mid \bar{D})P(\bar{D}) \\ &= 0,05 \times 0,01 + 0,02 \times 0,99 = 2,03\%. \end{aligned}$$

2. Par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \mid D)P(D) + P(C \mid \bar{D})P(\bar{D}) \\ &= 0,05 \times 0,01 + 0,98 \times 0,99 = 97,07\%. \end{aligned}$$

On utilise la formule de Bayes

$$P(D \mid C) = \frac{P(C \mid D)P(D)}{P(C)} = \frac{0,05 \times 0,01}{0,9707} \simeq 0,052\%.$$

Exercice 8 : Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note B_k l'évènement « on tire une boule blanche au k-ième tirage ». Soit I une partie de $[\![1,n]\!]$ dont on note I^c le complémentaire dans $[\![1,n]\!]$. Si l'on note

$$A_I = \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I^c} \bar{B}_i\right),$$

alors, en notant k le cardinal de I, on a avec la formule des probabilités composées

$$P\left(A_I\right) = \frac{b(b+d)\cdots(b+(k-1)d)r(r+d)\cdots(r+(n-1-k)d)}{(r+b)(r+b+d)\cdots(r+b+(n-1)d)}.$$

En particulier, la probabilité de A_I ne dépend que du cardinal de I et pas des éléments de I. On en déduit avec la formule des probabilités totales

$$P(B_n) = \sum_{I \subset [\![1,n-1]\!]} P\left(A_{I\cup\{n\}}\right) = \sum_{I \subset [\![2,n]\!]} P\left(A_{\{1\}\cup I}\right) = P(B_1) = \frac{b}{b+r}.$$

Exercice 9 :

1. Notons A_n l'évènement « le professeur oublie ses clés le n-ième jour ». On a alors

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \mid A_n)P(A_n) + P(A_{n+1} \mid \bar{A}_n)P(\bar{A}_n) \\ &= \frac{1}{10} \times p_n + \frac{4}{10} \times (1 - p_n) \\ &= \frac{2}{5} - \frac{3}{10} p_n. \end{aligned}$$

2. On reconnait une suite arithmético-géométrique. Son expression générale est

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \frac{4}{13} + \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{4}{13}\right).$$

3. La limite de la suite (p_n) est $4/13$. Lorsque n est grand, la probabilité que le professeur oublie ses clés le n-ième jour est d'environ $4/13$.

Exercice 10 :

1. Notons A_n l'évènement « la n-ième personne à la même information qu'au départ ». On a alors

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \mid A_n)P(A_n) + P(A_{n+1} \mid \bar{A}_n)P(\bar{A}_n) \\ &= p \times p_n + (1-p) \times (1 - p_n) \\ &= (2p-1)p_n + (1-p). \end{aligned}$$

2. On reconnait une suite arithmético-géométrique. Son expression générale est

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n.$$

3. La limite de la suite (p_n) est $1/2$. Lorsque n est grand, on n'a plus aucune indication permettant de savoir si la n-ième personne dispose de l'information initiale ou non.

Exercice 11 : En partant de la somme de droite, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} P(X > n) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^{N} P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=0}^{k-1} P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} kP(X = k) = E(X). \end{aligned}$$

Exercice 12 :

1. Par hypothèse, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $k \in [\![1,6]\!]$, on a $P(X = k) = ak$. Or on a la relation

$$\sum_{k=1}^{6} P(X = k) = 1 \Leftrightarrow 21a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{21}.$$

Ainsi, la loi de X est donnée par

$$\forall k \in [\![1,6]\!], \qquad P(X = k) = \frac{k}{21}.$$

2. Avec le théorème du transfert, on a

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \frac{91}{21}, \qquad \mathrm{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 P(X = k) = 21,$$

donc

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 21 - \left(\frac{91}{21}\right)^2 = \frac{980}{441} = \frac{20}{9}.$$

3. Avec le théorème du transfert, on a
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} P(X = k) = \frac{6}{21}.$$

Exercice 13 :

1. Notons A_i l'évènement « la i-ième personne réussit le test ». La variable aléatoire X prends ses valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a par indépendance
$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_{k-1} \cap A_k) \\ &= P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_{k-1}) P(A_k) = (1-p)^{k-1} p, \end{aligned}$$
tandis que
$$\begin{aligned} P(X = n+1) &= P(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_n) \\ &= P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n) = (1-p)^n. \end{aligned}$$

2. Par définition, on a
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{n+1} k P(X = k) = p \sum_{k=1}^{n} k(1-p)^{k-1} + (n+1)(1-p)^n.$$
La somme dans l'expression de droite est l'image en $1-p$ de la dérivée de la fonction
$$x \mapsto \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$
On en déduit que
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= p \frac{-(n+1)(1-p)^n p + (1 - (1-p)^{n+1})}{p^2} + (n+1)(1-p)^n \\ &= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p}. \end{aligned}$$

3. Recruter un candidat est l'évènement $(X \leqslant n)$, donc
$$P(X \leqslant n) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1-p)^n \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow p \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

Exercice 14 : Comme la variable aléatoire X prends ses valeurs dans $[\![0, n]\!]$, il en est de même pour $Y = n - X$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a
$$\begin{aligned} P(Y = k) = P(n - X = k) = P(X = n - k) &= \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^k \\ &= \binom{n}{k} (1-p)^k (1 - (1-p))^{n-k}. \end{aligned}$$
donc Y suit une loi binomiale de paramètre n et $1 - p$.

Exercice 15 : Avec le théorème du transfert, on a
$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^{k-1} (1-p)^{n+1-k} \\ &= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}, \end{aligned}$$
la dernière égalité provenant du binôme de Newton.

Exercice 16 :

1. On donne la loi du couple (X, Y) à l'aide d'un tableau. La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2 et 3, tandis que N prend les valeurs 0,1 et 2. Comme on est dans une situation d'équiprobabilité, on compte le nombre de cas favorable. Le nombre de cas totale est $3^3 = 27$.

$P(X = x \cap N = n)$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$P(X = x)$
$x = 0$	0	6/27	2/27	8/27
$x = 1$	6/27	6/27	0	12/27
$x = 2$	0	6/27	0	6/27
$x = 3$	0	0	1/27	1/27
$P(N = n)$	6/27	18/27	3/27	

2. On déduit les lois de X et de N à partir de la loi du couple (X, Y) dans le tableau ci-dessus.
3. On remarque que X suit une loi binomiale de paramètre $n = 3$ et $p = 1/3$. Ainsi, on a $\mathrm{E}(X) = 1$ et $\mathrm{V}(X) = 2/3$. Pour N, on applique la définition

$$\begin{aligned}
E(N) &= 0 \times \frac{6}{27} + 1 \times \frac{18}{27} + 2 \times \frac{3}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}, \\
E(N^2) &= 0^2 \times \frac{6}{27} + 1^2 \times \frac{18}{27} + 2^2 \times \frac{3}{27} = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}, \\
\mathrm{V}(N) &= \mathrm{E}(N^2) - \mathrm{E}(N)^2 = \frac{10}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{26}{81}.
\end{aligned}$$

4. Les variables aléatoires X et N ne sont pas indépendantes, car

$$P((X = 3) \cap (N = 0)) = 0 \neq P(X = 3)P(N = 0).$$

Exercice 17 :

1. On donne la loi du couple (U, V) à l'aide d'un tableau. Les variables aléatoires U et V prennent les valeurs 1, 2, 3 et 4. Comme on est dans une situation d'équiprobabilité, on compte le nombre de cas favorable. Le nombre de cas totale est $4^2 = 16$.

$P(U = u \cap V = v)$	$u = 1$	$u = 2$	$u = 3$	$u = 4$	$P(V = v)$
$v = 1$	1/16	0	0	0	1/16
$v = 2$	2/16	1/16	0	0	3/16
$v = 3$	2/16	2/16	1/16	0	5/16
$v = 4$	2/16	2/16	2/16	1/16	7/16
$P(U = u)$	7/16	5/16	3/16	1/16	

2. Pour l'espérance, on utilise la définition

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(U) &= 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{3}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}, \\
\mathrm{E}(V) &= 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{7}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}.
\end{aligned}$$

3. Les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes, car

$$P((U = 4) \cap (V = 1)) = 0 \neq P(U = 4)P(V = 1).$$

Exercice 18 :

1. On utilise la formule des probabilités totales, puis l'indépendance des variables aléatoires X et Y

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{n} P((X=Y)\cap(Y=k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P((X=k)\cap(Y=k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} P(X\leqslant Y) &= \sum_{k=1}^{n} P((X\leqslant Y)\cap(Y=k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P((X\leqslant k)\cap(Y=k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X\leqslant k)P(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Pour finir, on a

$$P(X\neq Y) = 1-P(X=Y) = 1-\frac{1}{n}.$$

2. La variable aléatoire $Z=X+Y$ prend ses valeurs dans $[\![2,2n]\!]$. On utilise la formule des probabilités totales pour $k\in[\![2,2n]\!]$, puis l'indépendance des variables aléatoires X et Y

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{\ell=1}^{n} P((X+Y=k)\cap(Y=\ell)) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} P((X=k-\ell)\cap(Y=\ell)) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} P(X=k-\ell)P(Y=\ell). \end{aligned}$$

Si $2\leqslant k\leqslant n$, on obtient

$$P(Z=k) = \sum_{\ell=1}^{k-1} P(X=k-\ell)P(Y=\ell) = \sum_{\ell=1}^{k-1}\frac{1}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{k-1}{n^2},$$

tandis que si $n+1\leqslant k\leqslant 2n$, on obtient

$$P(Z=k) = \sum_{\ell=k-n}^{n} P(X=k-\ell)P(Y=\ell) = \sum_{\ell=k-n}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{1}{n} = \frac{2n-k+1}{n^2}.$$

3. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y) = 2\mathrm{E}(X) = 2\frac{(n+1)}{2} = (n+1).$$

De plus, comme X et Y sont indépendantes, on a

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{n+1}{2}\times\frac{n+1}{2} = \frac{(n+1)^2}{4}.$$

4. Les variables aléatoires X et Z ne sont pas indépendantes, car

$$P((X=1)\cap(Z=2n)) = 0 \neq P(X=1)P(Z=2n).$$

5. La variable aléatoire M prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a

$$P(M \leqslant k) = P((X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)) = P(X \leqslant k)P(Y \leqslant k) = \frac{k^2}{n^2}.$$

Finalement, on a

$$P(M = k) = P(M \leqslant k) - P(M \leqslant k-1) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Exercice 19 :

1. Par définition, on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{n^2}.$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a avec la formule des probabilités totales

$$P(X = k) = \sum_{j=1}^{n} P((X = k) \cap (Y = j)) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

De même, on trouve $P(Y = k) = 1/n$.

2. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes car

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{n^2} = P(X = i)P(Y = j).$$

Exercice 20 :

1. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = j)) = 1 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} aij = 1 \\ &\Leftrightarrow a\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow a = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{-2}.\end{aligned}$$

2. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a avec la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}P(X = k) &= \sum_{j=1}^{n} P((X = k) \cap (Y = j)) = \sum_{j=1}^{n} akj \\ &= ak\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Pour l'espérance, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{j=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}.\end{aligned}$$

3. La loi de Y est la même que celle de X. On en déduit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes car

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = aij = P(X = i)P(Y = j).$$

4. Avec la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{n} P((X = Y) \cap (Y = k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P((X = k) \cap (Y = k)) \\ &= a\sum_{k=1}^{n} k^2 = a\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}.\end{aligned}$$

5. La variable aléatoire M prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a

$$P(M \leqslant k) = P((X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)) = P(X \leqslant k)P(Y \leqslant k).$$

Or, on a

$$P(X \leqslant k) = P(Y \leqslant k) = \sum_{i=1}^{k} P(X = i) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{n(n+1)},$$

donc

$$P(M \leqslant k) = \left(\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right)^2.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} P(M = k) &= P(M \leqslant k) - P(M \leqslant k-1) \\ &= \left(\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)k}{n(n+1)}\right)^2 = \frac{4k^3}{[n(n+1)]^2}. \end{aligned}$$

Exercice 21 :

1. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $j \leqslant i$, on a
$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P(Y = j \mid X = i)P(X = i) = \frac{1}{i} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{ni}.$$
2. La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Si $k \in [\![1,n]\!]$, on a par la formule des probabilités totales
$$P(Y = k) = \sum_{i=1}^{n} P((X = i) \cap (Y = k)) = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i}.$$
3. Comme X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, on a $E(X) = (n+1)/2$. Pour la variable aléatoire Y, on a
$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \frac{k}{ni} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{k}{ni} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2ni} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (i+1) = \frac{n(n+3)}{4n} = \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 22 :

1. Pour $k \in [\![1,N]\!]$, on a par indépendance mutuelle de $X_1, \ldots, X_n$
$$\begin{aligned} P(M_n \leqslant k) &= P((X_1 \leqslant k) \cap \cdots \cap (X_n \leqslant k)) \\ &= P(X_1 \leqslant k) \cdots P(X_n \leqslant k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n. \end{aligned}$$
On en déduit que
$$P(M_n = k) = P(M_n \leqslant k) - P(M_n \leqslant k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n.$$
2. En utilisant l'expression ci-dessus, on obtient
$$P(M_n = N) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Le résultat est intuitif. Si on simule un très grand nombre de loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$, on est quasi-certain que le maximum des résultats sera N.

Exercice 23 : On peut écrire avec les propriétés de la variance

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left([Y - (aX+b)]^2\right) &= \mathrm{V}\left(Y - (aX+b)\right) + \mathrm{E}\left(Y - (aX+b)\right)^2 \\ &= \mathrm{V}\left(Y - aX\right) + \mathrm{E}\left(Y - (aX+b)\right)^2 \end{aligned}$$

Pour le second terme, on a

$$\mathrm{E}\left(Y - (aX+b)\right)^2 = (\mathrm{E}(Y) - a\mathrm{E}(X) - b)^2$$

qui est nul lorsque $b = \mathrm{E}(Y) - a\mathrm{E}(X)$. Pour le premier terme, on a

$$\mathrm{V}\left(Y - aX\right) = a^2\mathrm{V}(X) - 2a\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{V}(Y).$$

qui est un polynôme du second degré en a car $\mathrm{V}(X) > 0$. Ainsi, le couple cherché est

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} \quad \text{et} \quad b = \frac{\mathrm{V}(X)\mathrm{E}(Y) - \mathrm{Cov}(X,Y)\mathrm{E}(X)}{\mathrm{V}(X)}.$$

Exercice 24 :

1. On donne la loi du couple (X, Y) sous forme d'un tableau. La variable aléatoire Y prend les valeurs 0, 1 et 4.

$P(X = x \cap Y = y)$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 4$	$P(X = x)$
$x = -2$	0	0	1/4	1/4
$x = -1$	0	1/8	0	1/8
$x = 0$	1/4	0	0	1/4
$x = 1$	0	1/8	0	1/8
$x = 2$	0	0	1/4	1/4
$P(Y = y)$	1/4	1/4	1/2	

2. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, car
$$P((X = 0) \cap (Y = 1)) = 0 \neq P(X = 0)P(Y = 1).$$
3. On a $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(X^3) - \mathrm{E}(X) = 0 - 0 = 0$. Les variables aléatoires ne sont pas indépendantes, mais elles sont de covariance nulle.

Exercice 25 :

1. La variable aléatoire X_1 compte le nombre de succès quand on répète n fois de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli. Ainsi X_1 suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 1/3$.
2. De même X_2 et X_3 suivent une loi binomiale de paramètre n et $p = 1/3$. On a donc $\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{V}(X_2) = 2n/9$. Avec la relation $X_1 + X_2 + X_3 = n$, on a
$$\mathrm{V}(X_1 + X_2) = \mathrm{V}(n - X_3) = \mathrm{V}(X_3) = \frac{2n}{9}.$$
3. On utilise la relation
$$\mathrm{V}(X_1 + X_2) = \mathrm{V}(X_1) + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{V}(X_2),$$
qui nous permet d'obtenir $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = -n/9$.

Exercice 26 :

1. La variable aléatoire V prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a
$$P(V \leqslant k) = P((X \leqslant k) \cap (Y \leqslant k)) = P(X \leqslant k)P(Y \leqslant k) = \frac{k^2}{n^2}.$$
Finalement, on a
$$P(V = k) = P(V \leqslant k) - P(V \leqslant k - 1) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$
De même pour la variable aléatoire U, on trouve
$$P(U = k) = \frac{2(n-k)+1}{n^2}.$$
2. On utilise la définition
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(V) &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{2k-1}{n^2} = \frac{2}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) \\ &= \frac{2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.\end{aligned}$$
En remarquant que $X + Y = U + V$, on obtient
$$\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(V) = (n+1) - \frac{(n+1)(4n-1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$
3. On a la relation $XY = UV$. Comme X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on a $\mathrm{E}(UV) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, donc
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U, V) &= \mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(U)\mathrm{E}(V) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} - \frac{(n+1)^2(2n+1)(4n-1)}{36n^2} \\ &= \frac{(n+1)^2(n-1)^2}{36n^2}.\end{aligned}$$

Exercice 27 :

1. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$, on a

$$P((X=i)\cap(Y=j)) = P(Y=j \mid X=i)P(X=i) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Si $k \in [\![1,n]\!]$, on a avec la formule des probabilités totales

$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=k)) = (n-1)\times\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}.$$

2. On commence par calculer

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ijP((X=i)\cap(Y=j)) \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij - \sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{(n+1)^2}{4} = -\frac{n+1}{12}.$$

3. La variable aléatoire Z prend ses valeurs dans $[\![1,n-1]\!]$. Pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= P(|X-Y|=k) = P((Y=X+k)\cup(Y=X-k)) \\
&= P(Y=X+k) + P(Y=X-k),
\end{aligned}$$

puis avec la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= \sum_{i=1}^{n} P((X=i)\cap Y=i+k) + \sum_{i=1}^{n} P((X=i)\cap Y=i-k) \\
&= \sum_{i=1}^{n-k}\frac{1}{n(n-1)} + \sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{n(n-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

Exercice 28 :

1. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ avec $i<j$, on avec la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}
P((X=i)\cap(Y=j)) &= \frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-i}{n-i+2}\times\frac{2}{n-i+1} \\
&\times\frac{n-i-1}{n-i}\times\cdots\times\frac{n-j+1}{n-j+2}\times\frac{1}{n-j+1} = \frac{2}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

On peut aussi remarquer qu'il y a $\binom{n}{2}$ façon de placer les boules dans l'ordre du tirage. Par équiprobabilité, on en déduit que

$$P((X=i)\cap(Y=j)) = \binom{n}{2}^{-1} = \frac{2}{n(n-1)}.$$

2. Pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a avec la formule des probabilités totales

$$P(X=k) = \sum_{j=1}^{n} P((X=k)\cap(Y=j)) = \sum_{j=k+1}^{n}\frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}.$$

De même pour $k \in [\![2,n]\!]$, on a

$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=k)) = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{2}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

3. On utilise la définition

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\frac{2(n-k)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}\left(n\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = \frac{n+1}{3}.\end{aligned}$$

En effectuant un calcul analogue, on trouve $\mathrm{E}(Y) = 2(n+1)/3$.

4. On commence par calculer

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ijP((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{2ij}{n(n-1)}\\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} ij = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n} j^2(j-1)\\ &= \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12} - \frac{2(n+1)^2}{9} = \frac{(n+1)(n-2)}{36}.$$

Exercice 29 :

1. D'après le cours, S_n suit une loi binomiale de paramètre n et p.
2. On a

$$\mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{E}(S_n) = p, \qquad \mathrm{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{V}(S_n) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

3. Avec l'inégalité $4p(1-p) \leqslant 1$ et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{V}(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

4. On pose $\varepsilon = 0,05$. On souhaite que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 0,95.$$

Il suffit de choisir n tel que

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2} \leqslant 0,05.$$

En résolvant l'inéquation, on trouve $n = 2000$.