Chapitre 5
Intégration d'une fonction sur un intervalle

Exercice 1 : On note I l'intégrale que l'on souhaite calculer.

(i) La fonction $t \mapsto 1/((t+1)(t+2))$ est continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout $\beta > 0$, on a

$$\int_0^\beta \frac{dt}{(t+1)(t+2)} = \int_0^\beta \left(\frac{1}{(t+1)} - \frac{1}{t+2}\right) dt = [\ln(t+1) - \ln(t+2)]_0^\beta$$
$$= \ln(2) + \ln\left(\frac{\beta+1}{\beta+2}\right) \underset{\beta\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2),$$

donc l'intégrale I converge et vaut $\ln(2)$.

(ii) La fonction $t \mapsto \ln(1+1/t^2)$ est continue sur $]0,+\infty[$. On introduit donc

$$I_1 = \int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$$

Pour tout $\beta > 1$, on a avec une intégration par partie

$$\int_1^\beta \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_1^\beta - \int_1^\beta t\frac{(-2/t)}{t^2+1}dt$$
$$= \beta\ln\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right) - \ln(2) + 2[\mathrm{Arctan}(t)]_1^\beta$$
$$= \beta\ln\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right) - \ln(2) + 2\mathrm{Arctan}(\beta) - \frac{\pi}{2}$$
$$\underset{\beta\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2) + \frac{\pi}{2},$$

donc l'intégrale I_2 converge et vaut $-\ln(2) + \frac{\pi}{2}$. De même, pour tout $0 < \alpha < 1$, on a

$$\int_\alpha^1 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt = \ln(2) - \alpha\ln\left(1+\frac{1}{\alpha^2}\right) + \frac{\pi}{2} - 2\mathrm{Arctan}(\alpha)$$
$$\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \ln(2) + \frac{\pi}{2},$$

donc l'intégrale I_1 converge et vaut $\ln(2) + \frac{\pi}{2}$. Finalement, l'intégrale I est convergente et on a $I = I_1 + I_2 = \pi$.

(iii) La fonction $t \mapsto \sin(\ln(t))$ est continue sur $]0,1]$. Pour tout $0 < \alpha < 1$, on a avec deux intégrations par partie

$$\int_\alpha^1 \sin(\ln(t))dt = [t\sin(\ln(t))]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \cos(\ln(t))dt$$
$$= [t\sin(\ln(t))]_\alpha^1 - [t\cos(\ln(t))]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \sin(\ln(t))dt.$$

On en déduit la relation

$$\int_\alpha^1 \sin(\ln(t))dt = \frac{\alpha\cos(\ln(\alpha)) - \alpha\sin(\ln(\alpha)) - 1}{2}$$
$$\underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2},$$

donc l'intégrale I converge et vaut $-1/2$.

Exercice 2 : Les fonctions $t \mapsto \cos(t)e^{-at}$ et $t \mapsto \sin(t)e^{-at}$ sont continues sur $[0,+\infty[$. Pour tout $\beta > 0$, on a

$$\int_0^\beta \cos(t)e^{-at}dt + i\int_0^\beta \sin(t)e^{-at}dt = \int_0^\beta e^{(i-a)t}dt$$
$$= \left[\frac{e^{(i-a)t}}{i-a}\right]_0^\beta = \frac{e^{(i-a)\beta}-1}{i-a}.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\int_0^\beta \cos(t)e^{-at}dt = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(i-a)\beta}-1}{i-a}\right), \quad \int_0^\beta \sin(t)e^{-at}dt = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(i-a)\beta}-1}{i-a}\right).$$

Comme $|e^{(i-a)\beta}| = e^{-a\beta} \to 0$ lorsque $\beta \to +\infty$, on en déduit que les intégrales I et J convergent avec

$$I = \mathrm{Re}\left(\frac{-1}{i-a}\right) = \frac{a}{a^2+1} \quad \text{et} \quad J = \mathrm{Im}\left(\frac{-1}{i-a}\right) = \frac{1}{a^2+1}.$$

Exercice 3 : On note I l'intégrale que l'on étudie et f la fonction intégrée.

(i) La fonction f est continue sur $[1,+\infty[$ et on a $|f(t)| \underset{+\infty}{\sim} 1/t^2$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc I est absolument convergente, donc convergente.

(ii) La fonction f est continue et positive sur $]0,+\infty[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^1 \frac{dt}{e^t-1} \quad \text{et} \quad K = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}.$$

- On a $f(t) \underset{0}{\sim} 1/t$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc J est divergente.

On conclut que I est divergente.

(iii) La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^1 \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) dt \quad \text{et} \quad K = \int_1^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right) dt.$$

- Sur $[0,1]$, on a $|f(t)| \leqslant 1$, or $\displaystyle\int_0^1 1dt$ est convergente, donc J est absolument convergente par comparaison, donc convergente.
- La fonction f est positive sur $[1,+\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 1$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty} 1dt$ est divergente, donc K est divergente par comparaison.

On conclut que I est divergente.

(iv) La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt \quad \text{et} \quad K = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt.$$

- Sur $[0,1]$, on a $|f(t)| \leqslant 1$, or $\displaystyle\int_0^1 1dt$ est convergente, donc J est absolument convergente par comparaison, donc convergente.
- La fonction f est positive sur $[1,+\infty[$ et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 1/t^2$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc K est convergente par comparaison.

On conclut que I est convergente.

(v) La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^1 \ln(t)e^{-t}dt \quad \text{et} \quad K = \int_1^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt.$$

- Sur $[0,1]$, on a $|f(t)| \underset{0}{\sim} -\ln(t)$, or $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est une intégrale de référence convergente, donc J est absolument convergente par comparaison, donc convergente.
- La fonction f est positive sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$, donc pour tout réel $t > 1$ suffisamment grand, on a

$$0 \leqslant t^2 f(t) \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc K est convergente par comparaison.

On conclut que I est convergente.

(vi) La fonction f est continue sur $]0,+1[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^{1/2} \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}}dt \quad \text{et} \quad K = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}}dt.$$

- Sur $[0,1/2]$, on a $|f(t)| \underset{0}{\sim} -\ln(t)$, or $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est une intégrale de référence convergente, donc J est absolument convergente par comparaison, donc convergente.

- En effectuant le changement de variable $u = 1 - t$ dans l'intégrale K, on obtient l'intégrale
$$K' = \int_0^{1/2} \underbrace{\frac{\ln(1-u)}{u^{3/2}}}_{g(u)} du.$$
On a $|g(u)| \underset{0}{\sim} 1/u^{1/2}$, or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc K' est absolument convergente par comparaison, donc convergente. Avec le théorème du changement de variable, on en déduit que K est convergente.

On conclut que I est convergente.

(vii) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on a
$$0 \leqslant f(t) = |\sin(t)||\sin(e^{-t})| \leqslant e^{-t}.$$
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est une intégrale de référence convergente, donc I est converge absolument par comparaison, donc est convergente.

(viii) La fonction f est continue et positive sur $]-\infty, +\infty[$. On doit donc étudier les intégrales
$$J = \int_{-\infty}^0 e^{-t^2}dt \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

- On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$, donc pour tout réel $t > 0$ suffisamment grand, on a
$$0 \leqslant t^2 f(t) \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc K est absolument convergente par comparaison, donc convergente.
- En posant $x = -t$ dans J, on obtient l'intégrale K qui est convergente. On en déduit avec le théorème du changement de variable que J est convergente.

On conclut que I est convergente.

(ix) La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, on a
$$0 \leqslant |f(t)| = |t\sin(t)e^{-t}| \leqslant te^{-t}.$$
De plus, on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^3e^{-t} = 0$, donc pour tout réel $t > 0$ suffisamment grand
$$0 \leqslant t^2|f(t)| \leqslant t^3e^{-t} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant |f(t)| \leqslant \frac{1}{t^2}.$$
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc I est converge absolument par comparaison, donc est convergente.

(x) La fonction f est continue et positive sur $]0, +1[$. On doit donc étudier les intégrales
$$J = \int_0^{1/2} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad K = \int_{1/2}^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}.$$

- Sur $[0, 1/2]$, on a $f(t) \underset{0}{\sim} 1/\sqrt{t}$, or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ est une intégrale de Riemann convergente, donc J est absolument convergente par comparaison, donc convergente.
- En effectuant le changement de variable $u = 1 - t$ dans l'intégrale K, on obtient l'intégrale
$$K' = \int_0^{1/2} \underbrace{\frac{1}{u\sqrt{1-u}}}_{g(u)} du.$$
On a $|g(u)| \underset{0}{\sim} 1/u$, or $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{u}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc K' est divergente par comparaison. Avec le théorème du changement de variable, on en déduit que K est divergente.

On conclut que I est divergente.

(xi) La fonction f est continue et positive sur $]-1,1[$. On doit donc étudier les intégrales

$$J = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{et} \quad K = \int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

- Pour $0 < \alpha < 1$, on a
$$\int_0^\alpha \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\text{Arcsin}(t)]_0^\alpha = \text{Arcsin}(\alpha) \underset{\alpha \to 1}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$
donc l'intégrale J est convergente et vaut $\pi/2$.
- En posant $x = -t$ dans K, elle devient l'intégrale J. Ainsi K est convergente et $K = J = \pi/2$.

Finalement, I est convergente et $I = J + K = \pi$.

(xii) La fonction f est continue et positive sur $]1,+\infty[$. De plus, on a

$$tf(t) = e^{\ln(t) - \sqrt{\ln(t)}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On en déduit que pour tout réel $t > 1$ suffisamment grand, on a

$$tf(t) \geqslant 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(t) \geqslant \frac{1}{t} \geqslant 0.$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc I est divergente par comparaison.

Exercice 4 : On note I l'intégrale dont on étudie la convergence.

(i) La fonction $f : t \mapsto \left((t+1)^{1/3} - t^{1/3}\right)^2$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus, on a

$$(t+1)^{1/3} = t^{1/3}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1/3} = t^{1/3}\left(1 + \frac{1}{3t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$
$$= t^{1/3} + \frac{1}{3t^{2/3}} + o\left(\frac{1}{t^{2/3}}\right).$$

En particulier, on obtient

$$f(t) = \left(\frac{1}{3t^{2/3}} + o\left(\frac{1}{t^{2/3}}\right)\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{9t^{4/3}}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{4/3}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale I est convergente par comparaison.

(ii) La fonction $f : t \mapsto t+2-\sqrt{t^2+4t+1}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus, on a

$$\sqrt{t^2+4t+1} = t\left(1+\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}\right)^{1/2}$$
$$= t\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{t}\right)^2 + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)$$
$$= t + 2 - \frac{3}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right).$$

En particulier, on obtient

$$f(t) = \left(\frac{3}{2t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2t}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann qui diverge. Finalement, par comparaison, l'intégrale I est divergente.

Exercice 5 : La fonction $t \mapsto (t - \sin(t))/t^a$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$. On pose

$$J_a = \int_0^1 \frac{t-\sin(t)}{t^a} dt \quad \text{et} \quad K_a = \int_1^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^a} dt.$$

- On étudie l'intégrale J_a. On a
$$\frac{t-\sin(t)}{t^a} = \frac{t^3/6 + o(t^3)}{t^a} \underset{0}{\sim} \frac{1}{6t^{a-3}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{dt}{t^{a-3}}$ converge si et seulement si $a-3<1$ ce qui équivaut à $a<4$. On en déduit que J_a converge si et seulement si $a<4$ par critère de comparaison.

- On étudie l'intégrale K_a. On a

$$\frac{t-\sin(t)}{t^a} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t}{t^a} = \frac{1}{t^{a-1}}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{a-1}}$ converge si et seulement si $a-1>1$ ce qui équivaut à $a>2$. On en déduit que K_a converge si et seulement si $a>2$ par critère de comparaison.

Finalement, l'intégrale I_a converge si et seulement si $2<a<4$.

Exercice 6 : En posant $u=e^t$, on obtient

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{du}{(u+1)^2}.$$

Pour tout $\beta>1$, on a

$$\int_1^\beta \frac{du}{(u+1)^2} = \left[\frac{-1}{u+1}\right]_1^\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\beta+1} \underset{\beta\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

donc l'intégrale J est convergente et vaut $1/2$. Finalement, par le théorème du changement de variable, l'intégrale I est convergente et $I=1/2$.

Exercice 7 : En posant $u=\sqrt{t}$, on obtient

$$J = \int_0^1 4\ln(u)du.$$

Pour tout $0<\alpha<1$, on a

$$\int_\alpha^1 4\ln(u)du = 4\left[u\ln(u)-u\right]_\alpha^1 = 4(-1-\alpha\ln(\alpha)+\alpha \underset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} -4,$$

donc l'intégrale J est convergente et vaut -4. Finalement, par le théorème du changement de variable, l'intégrale I est convergente et $I=-4$.

Exercice 8 : En posant $x=(1+\sin(t))/2$, on obtient

$$J = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1dx$$

qui est convergente et vaut π. Ainsi, par le théorème du changement de variable, l'intégrale I est convergente et $I=\pi$.

Exercice 9 :

1. La fonction $t\mapsto 1/((1+t^2)(1+t^a))$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus, on a
$$\frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2+a}}.$$
Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{2+a}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc I_a est convergente par critère de comparaison. De même, $t\mapsto t^a/((1+t^2)(1+t^a))$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et
$$\frac{t^a}{(1+t^2)(1+t^a)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$
Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc J_a est convergente par critère de comparaison.
2. Avec le changement de variable, on obtient directement que $I_a=J_a$.
3. On a
$$I_a+J_a = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^a)dt}{(1+t^2)(1+t^a)} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)}.$$
Or, pour tout réel $\beta>0$, on a
$$\int_0^\beta \frac{dt}{(1+t^2)} = [\text{Arctan}(t)]_0^\beta = \text{Arctan}(\beta) \underset{\beta\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$
donc $I_a+J_a=\pi/2$. Comme $I_a=J_a$, on en déduit que $I_a=J_a=\pi/4$.

Exercice 10 :

1. La fonction $f : t \mapsto \ln(t)/(a^2+t^2)$ est continue sur $]0,+\infty[$. On introduit donc les intégrales
$$J_a = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt \quad \text{et} \quad K_a = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt.$$
   - On a $|f(t)| \underset{0}{\sim} |\ln(t)| = -\ln(t)$. Or l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ est une intégrale de référence convergente, donc par comparaison, l'intégrale J_a converge absolument, donc converge.
   - On a $\lim_{t\to+\infty} t^{3/2}|f(t)| = 0$, donc pour tout réel $t>0$ suffisamment grand, on a
$$0 \leqslant t^{3/2}f(t) \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant |f(t)| \leqslant \frac{1}{t^{3/2}}.$$
Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^{3/2}}$ est convergente, donc K_a est absolument convergente par comparaison, donc convergente.

   Finalement, l'intégrale I_a est convergente.
2. Avec le changement de variable, on obtient directement que $I_1 = -I_1$, donc $I_1 = 0$.
3. Avec le changement de variable $t = au$, on obtient
$$\begin{aligned} I_a &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{a\ln(au)}{a^2+a^2u^2}du \\ &= \frac{\ln(a)}{a}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2} + \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\ln(u)}{1+u^2}du}_{I_1} = \frac{\ln(a)}{a}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}. \end{aligned}$$
Or, pour tout réel $\beta > 0$, on a
$$\int_0^\beta \frac{dt}{(1+t^2)} = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^\beta = \mathrm{Arctan}(\beta) \underset{\beta\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2},$$
donc $I_a = \dfrac{\pi\ln(a)}{2a}$.

Exercice 11 :

1. La fonction $t \mapsto \ln(\sin(t))$ est continue sur $]0,\pi/2]$. De plus, on a
$$|\ln(\sin(t))| = \left|\ln(t) + \ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)\right| \underset{0}{\sim} |\ln(t)| = -\ln(t).$$
Or $\int_0^1 \ln(t)dt$ est une intégrale de référence convergente, donc I est absolument convergente par comparaison, donc convergente.
2. En posant $u = \pi/2 - t$ dans l'intégrale J, elle devient l'intégrale I. On en déduit que J est convergente et que $I = J$.
3. On a
$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)\cos(t))dt = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)dt \\ &= -\frac{\pi\ln(2)}{2} + \int_0^{\pi/2}\ln(\sin(2t))dt. \end{aligned}$$
En posant $u = 2t$, on obtient
$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(2t))dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(\sin(u))du = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin(u))du.$$
En posant $x = \pi - t$ sans cette dernière intégrale, on trouve
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin(u))du &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(\pi-x))dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(x))dx = \frac{1}{2}I. \end{aligned}$$
Finalement, on a montré que $I + J = -\dfrac{\pi\ln(2)}{2} + I$, donc
$$I = J = -\frac{\pi\ln(2)}{2}.$$

Exercice 12 :

1. La fonction $f : t \mapsto \sin(t)/t$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc on introduit

$$J = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad K = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

- Sur $]0, \pi]$, la fonction f est positive et on a $f(t) \underset{0}{\sim} 1$. Or l'intégrale $\int_0^{\pi} 1dt$ est convergente, donc J est convergente par comparaison.
- Pour tout $\beta > \pi$, on a avec une intégration par partie

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{\beta} \frac{\sin(t)}{t} dt &= \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_{\pi}^{\beta} - \int_{\pi}^{\beta} \frac{\cos(t)}{t^2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{\cos(\beta)}{\beta} - \int_{\pi}^{\beta} \underbrace{\frac{\cos(t)}{t^2}}_{g(t)} dt. \end{aligned}$$

Or, on a $|g(t)| \leqslant 1/t^2$ et $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc $\int_{\pi}^{+\infty} g(t)dt$ est absolument convergente par comparaison, donc convergente.

Comme $\lim_{\beta \to +\infty} \cos(\beta)/\beta = 0$, on en déduit en prenant la limite lorsque $\beta \to +\infty$ dans la relation précédente que l'intégrale K est convergente.

Finalement, l'intégrale I est convergente.

2. On a l'inégalité

$$\forall t \in [n\pi, (n+1)\pi], \qquad \frac{|\sin(t)|}{t} \geqslant \frac{|\sin(t)|}{(n+1)\pi}.$$

En intégrant, on en déduit

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|dt.$$

Or la fonction $t \mapsto |\sin(t)|$ est π - périodique, donc

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|dt = \int_0^{\pi} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\pi} = 2,$$

ce qui démontré l'inégalité.

3. En sommant les inégalités précédentes, on obtient

$$\int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geqslant \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2}{(n+1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{N\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt = +\infty,$$

par comparaison. Ainsi, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 13 :

1. La fonction $f : t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Or $\lim_{t \to +\infty} t^2 f(t) = 0$, donc pour tout réel $t > 0$ suffisamment grand, on a

$$0 \leqslant t^2 f(t) \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une une intégrale de Riemann convergente, donc I_n est convergente par relation de comparaison.

2. Pour tout réel $\beta > 0$, on a avec une intégration par partie

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta} t^{n+1} e^{-t} dt &= [-t^{n+1} e^{-t}]_0^{\beta} + (n+1) \int_0^{\beta} t^n e^{-t} dt \\ &= -\beta^{n+1} e^{-\beta} + (n+1) \int_0^{\beta} t^n e^{-t} dt. \end{aligned}$$

Comme I_n et I_{n+1} sont convergentes et que $\lim_{\beta\to+\infty} \beta^{n+1}e^{-\beta} = 0$, on obtient $I_{n+1} = (n+1)I_n$ en passant à la limite lorsque $\beta \to +\infty$.

3. Avec la relation obtenue à la question précédente, on peut conjecturer que $I_n = n!I_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrons cette propriété $\mathscr{P}_n$ par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$.
   - Initialisation : Pour $n = 0$, on a bien $I_0 = 0!I_0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. On a alors
   $$I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)n!I_0 = (n+1)!I_0,$$
   donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : On a montré $\mathscr{P}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Finalement, pour tout réel $\beta > 0$, on a
   $$\int_0^\beta e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^\beta = 1 - e^{-\beta} \underset{\beta\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$
   donc $I_0 = 1$ et $I_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 :

1. La fonction $f : t \mapsto t^n \ln^p(t)$ est continue sur $]0,1]$. Or $\lim_{t\to0} t^{1/2}|f(t)| = 0$, donc pour tout réel $t > 0$ suffisamment petit, on a
$$0 \leqslant t^{1/2}|f(t)| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant |f(t)| \leqslant \frac{1}{t^{1/2}}.$$
Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$ est une une intégrale de Riemann convergente, donc $I_{n,p}$ est absolument convergente par relation de comparaison, donc convergente.
2. Pour tout réel $0 < \alpha < 1$, on a avec une intégration par partie
$$\begin{aligned}\int_\alpha^1 t^n \ln^p(t)dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^p(t)\right]_\alpha^1 + -\frac{p}{n+1}\int_\alpha^1 t^{n+1}\frac{\ln^{p-1}(t)}{t}dt \\ &= -\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\ln^p(\alpha) + -\frac{p}{n+1}\int_\alpha^1 t^n \ln^{p-1}(t)dt.\end{aligned}$$
Comme $I_{n,p}$ et $I_{n,p-1}$ sont convergentes et que $\lim_{\alpha\to0} \alpha^{n+1}\ln^p(\alpha) = 0$, on obtient $I_{n,p} = -\frac{p}{n+1} \cdot I_{n,p-1}$ en passant à la limite lorsque $\alpha \to 0$.
3. Avec la relation obtenue à la question précédente, on peut conjecturer que
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{n,p} = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^{p+1}}.$$
Démontrons cette propriété $\mathscr{P}_p$ par récurrence pour $p \in \mathbb{N}$.
   - Initialisation : Pour $p = 0$, on a
   $$I_{n,0} = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} = (-1)^0\frac{0!}{(n+1)^{0+1}},$$
   donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_p$ est vraie. On a alors
   $$I_{n,p+1} = -\frac{p+1}{n+1}\cdot I_{n,p} = -\frac{p+1}{n+1}(-1)^p\frac{p!}{(n+1)^{p+1}} = (-1)^{p+1}\frac{(p+1)!}{(n+1)^{p+2}},$$
   donc $\mathscr{P}_{p+1}$ est vraie.
   - Conclusion : On a montré $\mathscr{P}_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 :

1. La fonction $t \mapsto t^{x-1}/(1+t)$ est continue et positive sur $]0,1]$ et on
$$\frac{t^{x-1}}{1+t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}.$$
Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ converge si et seulement si $1 - x < 1$, ce qui équivaut à $x > 0$. Ainsi, par comparaison, la fonction f est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ tel que $x \leqslant y$. On obtient
$$\forall t \in]0,1], \quad \frac{t^{x-1}}{1+t} \geqslant \frac{t^{y-1}}{1+t},$$
donc en intégrant, $f(x) \geqslant f(y)$. Ainsi, la fonction f est décroissante.

3. Pour $x > 0$, on a

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt = \int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{x}.$$

4. Comme la fonction f est décroissante et positive, on sait qu'elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. En prenant la limite dans la relation de la question 3, on trouve $\ell = 0$. De plus, en utilisant la relation de la question 3 et la décroissance de f, on a pour tour $x > 1$ que

$$\frac{1}{x} = f(x) + f(x+1) \leqslant 2f(x) \leqslant f(x-1) + f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

   On obtient donc
$$1 \leqslant 2xf(x) \leqslant \frac{x}{x-1},$$
   donc en utilisant le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

5. Comme la fonction f est décroissante, on sait qu'elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 0. De même, la fonction $x \mapsto f(x+1)$ est décroissante et majoré par $f(1)$ sur $]0, +\infty[$, donc elle admet une limite finie lorsque $x \to 0$. On en déduit en prenant la limite dans la relation de la question 3 qu'on ne peut avoir que $\ell = +\infty$. De plus, on a

$$\lim_{x\to 0} xf(x) = \lim_{x\to 0} 1 - xf(x+1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}.$$