# Révisions d'algèbre linéaire

**Exercice 1 :** Il est clair que $F$ est une partie de $\mathbb{R}^3$. On vérifie les autres points de la définition.

- Le vecteur $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in F$ car $0 + 2 \cdot 0 = 0$.
- Soient $u = (x,y,z) \in F$ et $u' = (x',y',z') \in F$. On a
$$u + u' = (x+x', y+y', z+z')$$
et
$$(x+x') + 2(y+y') = (x+2y) + (x'+2y') = 0 + 0 = 0,$$
donc $u + u' \in F$.
- Soient $u = (x,y,z) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ et
$$(\lambda x) + 2(\lambda y) = \lambda(x+2y) = \lambda \cdot 0 = 0,$$
donc $\lambda u \in F$.

On a donc montré que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus, on a
$$x + 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2y,$$
donc on peut écrire
$$F = \mathrm{Vect}\big((-2,1,0),(0,0,1)\big).$$

**Exercice 2 :** Il est clair que $F$ est une partie de $\mathbb{R}^4$. On vérifie les autres points de la définition.

- Le vecteur $0_{\mathbb{R}^4} \in F$ car $0+0+0 = 0+0+0 = 0$.
- Soient $u = (x,y,z,t) \in F$ et $u' = (x',y',z',t') \in F$. On a
$$u + u' = (x+x', y+y', z+z', t+t')$$
et
$$\begin{aligned}(x+x') + (y+y') + (t+t') &= (x+y+z) + (x'+y'+z') = 0+0 = 0,\\ (y+y') + (z+z') + (t+t') &= (x+y+z) + (x'+y'+z') = 0+0 = 0,\end{aligned}$$
donc $u + u' \in F$.
- Soient $u = (x,y,z,t) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ et
$$\begin{aligned}(\lambda x) + (\lambda y) + (\lambda z) &= \lambda(x+y+z) = \lambda \cdot 0 = 0,\\ (\lambda y) + (\lambda z) + (\lambda t) &= \lambda(y+z+t) = \lambda \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$
donc $\lambda u \in F$.

On a donc montré que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. De plus, on a
$$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ y+z+t &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x &= t \\ y &= -z-t \end{cases}$$
donc on peut écrire
$$F = \mathrm{Vect}\big((1,-1,0,1),(0,-1,1,0)\big).$$

**Exercice 3 :** Il est clair que $F$ est une partie de $\mathbb{R}[X]$. On vérifie les autres points de la définition.

- Le vecteur $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$ car $\int_{-1}^{1} 0 dt = 0$.
- Soient $P, Q \in F$. On a
$$\int_{-1}^{1} (P+Q)(t)dt = \int_{-1}^{1} P(t)dt + \int_{-1}^{1} Q(t)dt = 0 + 0 = 0,$$
donc $P + Q \in F$.
- Soient $P \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$\int_{-1}^{1} (\lambda P)(t)dt = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)dt = \lambda \cdot 0 = 0,$$
donc $\lambda P \in F$.

On a donc montré que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 4 :** On montre que la famille $\mathscr{F}$ est libre. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant
$$\begin{aligned} & a(1,-1,0,1) + b(1,1,1,1) + c(1,0,-1,-1) + d(0,1,1,1) = (0,0,0,0) \\ \Leftrightarrow \quad & (a+b+c, -a+b+d, b-c+d, a+b-c+d) = (0,0,0,0). \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0 \\ -a+b+d &=& 0 \\ b-c+d &=& 0 \\ a+b-c+d &=& 0. \end{array}\right.$$

En appliquant le pivot de Gauss, on obtient $a=b=c=d=0$, donc la famille $\mathscr{F}$ est libre. Comme $\mathscr{F}$ est une famille libre de cardinal 4 dans $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, on en déduit que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 5 :** La famille $\mathscr{F}_a$ est une base ssi la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

est inversible. Le déterminant de cette matrice est $a-2$. Comme la matrice est inversible ssi son déterminant est non nul, on conclut que $\mathscr{F}_a$ est une base ssi $a \neq 2$.

**Exercice 6 :** On montre que que la famille $\mathscr{F}$ est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{aligned} & aX(X-1)+bX(X-2)+c(X-1)(X-2)=0 \\ \Leftrightarrow \quad & (a+b+c)X^2-(a+2b+3c)X+2c=0. \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 0 \\ a+2b+3c &=& 0 \\ 2c &=& 0 \end{array}\right.$$

En appliquant le pivot de Gauss, on obtient $a=b=c=0$, donc la famille $\mathscr{F}$ est libre. Comme $\mathscr{F}$ est une famille libre de cardinal 3 dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3, on en déduit que $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

**Exercice 7 :**

1. On montre que $f$ est linéaire. Soient $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $u'=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(u+\lambda u') &= f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') \\ &= \big((x+\lambda x')+(y+\lambda y')+(z+\lambda z'), (x+\lambda x')-(y+\lambda y')-(z+\lambda z')\big) \\ &= (x+y+z, x-y-z)+\lambda(x'+y'+z', x'-y'-z') \\ &= f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z') = f(u)+\lambda f(u'). \end{aligned}$$

   On en déduit que $f$ est linéaire.

2. Pour le noyau de $f$, on a

$$f(x,y,z)=(0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 0 \\ x-y-z &=& 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& -z, \end{array}\right.$$

   donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(0,1,-1)$. Pour finir, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\big(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big((1,1),(1,-1),(1,-1)\big) = \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

**Exercice 8 :**

1. Montrons que $f$ est linéaire. Soient $P,Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(0)+(P+\lambda Q)(1) \\ &= (P(0)+P(1))+\lambda(Q(0)+Q(1)) \\ &= f(P)+\lambda f(Q). \end{aligned}$$

   On en déduit que $f$ est linéaire.

2. Pour le noyau de $f$, si on écrit $P=aX^2+bX+c$, on a

$$f(P)=0 \quad \Leftrightarrow \quad a+b+2c=0.$$

   donc $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(2X^2-1, X^2-X)$. Pour finir, on a

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\big(f(1),f(X),f(X^2)\big)=\mathrm{Vect}\big(2,1,1\big)=\mathbb{R}.$$

**Exercice 9 :**

1. Montrons que $f$ est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q) + (1-X)(P+\lambda Q)' \\ &= (P+(1-X)P') + \lambda(Q+(1-X)Q') \\ &= f(P) + \lambda f(Q). \end{aligned}$$

   On en déduit que $f$ est linéaire.

2. Pour le noyau de $f$, si on écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on a

$$\begin{aligned} f(P) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad aX^3 + bX^2 + cX + d + (1-X)(3aX^2 + 2bX + c) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2aX^3 + (3a-b)X^2 + bX + (c+d) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -2aX^3 + (3a-b)X^2 + bX + (c+d) = 0. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \\ c &=& -d, \end{array} \right. \end{aligned}$$

   donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(X-1)$. Pour finir, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\big(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big(1, 1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3\big) \\ &= \mathrm{Vect}\big(1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3\big). \end{aligned}$$

3. La famille $\big(X-1, 1, 2X-X^2, 3X^2-2X^3\big)$ (obtenue par réunion de la base $(X-1)$ de $\mathrm{Ker}(f)$ et de la base de $(1, 2X-X^2, 3X^2-2X^3)$ de $\mathrm{Im}(f)$) est une base de $\mathbb{R}_4[X]$, donc la somme et directe et on a $\mathbb{R}_4[X] = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

**Exercice 10 :** En utilisant le pivot de Gauss, les inverses sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 11 :** On peut écrire $M = \mathrm{I}_3 + N$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $N$ vérifie $N^3 = 0$ et commute avec $\mathrm{I}_3$. En utilisant le binôme de Newton, on obtient

$$\begin{aligned} M^n = (\mathrm{I}_3 + N)^3 &= \mathrm{I}_3^n N^0 + n\mathrm{I}_3^{n-1}N + \binom{n}{2}\mathrm{I}_3^{n-2}N^2 \\ &= \mathrm{I}_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercice 12 :** Pour la première matrice, on trouve $\mathrm{rang}(M) = 2$ et

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right), \quad \mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Pour la seconde matrice, on trouve $\mathrm{rang}(M) = 1$ et

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Pour la troisième matrice, on trouve $\mathrm{rang}(M) = 2$ et

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}\right).$$

**Exercice 13 :** En appliquant le pivot de Gauss, on trouve que le rang est 1 si $a = \pm 1$, 4 sinon.

**Exercice 14 :** Avec la définition, on trouve

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 15 :**

1. Montrons que $u$ est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} u(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q) + (P+\lambda Q)'(X+1) \\ &= (P + P'(X+1)) + \lambda(Q + Q'(X+1)) \\ &= u(P) + \lambda u(Q). \end{aligned}$$

   On en déduit que $u$ est linéaire.

2. En appliquant la définition, on trouve

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La matrice est de rang 4, donc elle est inversible. On en déduit que $u$ est un isomorphisme.

4. En résolvant le système, on a

$$\mathrm{Ker}(M - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

   On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1).$$

5. En prenant les colonnes de la matrice $M - \mathrm{I}_4$, on a

$$\mathrm{Im}(M - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

   On en déduit que

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1, 2+2X, 3+6X+3X^2).$$

**Exercice 16 :**

1. Avec la définition, on trouve

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$\begin{aligned} u(2,-1) &= (4,-2) = 2\cdot(2,-1) + 0\cdot(1,-1), \\ u(1,-1) &= (3,-3) = 0\cdot(2,-1) + 3\cdot(1,-1), \end{aligned}$$

   donc par définition, on en déduit

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. D'après la formule du changement de base, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u^n) = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^n) \cdot P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}.$$

   De plus, on a

$$P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^n) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

On trouve finalement

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u^n) = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix},$$

donc

$$u^n(x,y) = \big((2^{n+1} - 3^n)x + (2^{n+1} - 2 \cdot 3^n)y, (3^n - 2^n)x + (2 \cdot 3^n - 2^n)y\big).$$

**Exercice 17 :**

1. La matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est non nul, donc elle est inversible. On en déduit que $\mathscr{B}'$ est une base de $E$.

2. On a

$$\begin{aligned} f(u) &= f(i+k) = f(i) + f(k) = -k + i + 2k = i + k = u \\ f(v) &= f(i+j) = f(i) + f(j) = -k + i + j + k = i + j = v \\ f(w) &= f(i+j+k) = f(i) + f(j) + f(k) = 2i + j + 2k = u + w. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. En utilisant la formule du changement de base, on a

$$A^n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^n) = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)^n \cdot P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}}.$$

De plus, on a

$$P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u^n) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve finalement

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-n & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ -n & n & n+1 \end{pmatrix}.$$