Devoir libre n°05

CORRECTION

Exercice (avec Python)

1) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définis par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = 2X \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}.$$

Si l'on travaille « à la main », (ce n'est pas demandé mais c'est juste pour vérifier après), on a :

$$P_2 = 2XP_1 - P_0 = 4X^2 - 1,\ P_3 = 2XP_2 - P_1 = 8X^3 - 4X$$

et

$$P_4 = 2XP_3 - P_2 = 2X(8X^3 - 4X) - 4X^2 + 1 = 16X^4 - 12X^2 + 1.$$

Passons à Python. On peut taper :

```
>>> from numpy.polynomial import Polynomial
>>> def P(n) :
        if n == 0 :
            return Polynomial([1])
        elif n == 1 :
            return Polynomial([0, 2])
        else :
            return Polynomial([0, 2]) * P(n - 1) - P(n - 2)
>>> P(4)

Polynomial([1., 0., -12., 0., 16.], [-1., 1.], [-1., 1.]) (Cela marche !)
>>> [P(n).coef for n in range(2, 9)]
[array([-1., 0., 4.]),
array([0., -4., 0., 8.]),
array([1., 0., -12., 0., 16.]),
array([0., 6., 0., -32., 0., 32.]),
array([-1., 0., 24., 0., -80., 0., 64.]),
array([0., -8., 0., 80., 0., -192., 0., 128.]),
array([1., 0., -40., 0., 240., 0., -448., 0., 256.])]
```

2) On peut conjecturer que si a_n est le coefficient dominant de P_n, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\deg P_n = n,\ a_n = 2^n \text{ et } P_n \text{ a la même parité que } n.$$

Les résultats conjecturés sont évidemment vrais pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons qu'ils soient vraies jusqu'à un ordre n supérieur ou égal à 1. Donc, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = 2^k X^k + Q_k$, où Q_k est un polynôme de degré au plus $k - 1$ et dont la parité est celle de k (car $2^k X^k$ a la même parité que k). On peut écrire :

$$P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1} = 2X(2^n X^n + Q_n) - (2^{n-1} X^{n-1} + Q_{n-1}),$$

c'est-à-dire :

$$P_{n+1} = 2^{n+1} X^{n+1} + 2XQ_n - 2^{n-1} X^{n-1} - Q_{n-1}.$$

Le polynôme $2XQ_n - 2^{n-1}X^{n-1} - Q_{n-1}$ est de degré au plus n et le monôme dominant de P_{n+1} est $2^{n+1}X^{n+1}$. Donc, P_{n+1} est de degré $n+1$ et son coefficient dominant est 2^{n+1}. Enfin, $2^{n+1}X^{n+1}$ a la parité de $n+1$, $2XQ_n$ a le contraire de la parité de Q_n (car X est impair) donc a le contraire de la parité de P_n et donc a la parité de $n+1$, puis $-2^{n-1}X^{n-1}$ a la parité de $n-1$ donc de $n+1$ et enfin $-Q_{n-1}$ a la parité de $n-1$ donc de $n+1$, et P_{n+1} qui est la somme de tous ces polynômes a leur parité commune qui est celle de $n+1$. On a donc prouvé ce qui avait été conjecturé : si a_n est le coefficient dominant de P_n, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\deg P_n = n,\ a_n = 2^n \text{ et } P_n \text{ a la même parité que } n.$$

3)a) On pose : $\langle P,\, Q\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,dt$ pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$.

On commence par remarquer que la quantité $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,dt$ existe pour tout couple de polynômes.

Remarque (pour 5/2) : on peut montrer que $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire. Faisons le. Il faut montrer que $\langle\, ,\, \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

Symétrie

Pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$,

$$\langle P,\, Q\rangle = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}Q(t)P(t)\,dt = \langle Q,\, P\rangle.$$

Bilinéarité

Pour tout $(P, Q, R) \in (\mathbb{R}[X])^3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\langle P,\, Q + \alpha R\rangle$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)(Q(t)+\alpha R(t))\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,dt + \alpha\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P(t)R(t)\,dt \\
&= \langle P,\, Q\rangle + \alpha\langle P,\, R\rangle.
\end{aligned}$$

Forme définie et positive

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P,\, P\rangle = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P^2(t)\,dt \geqslant 0$$

car on intégre de -1 à 1 une fonction à valeurs positives.
La forme $\langle\, ,\, \rangle$ est bien définie. Puis :

$$\langle P,\, P\rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}P^2(t)\,dt = 0.$$

Comme $t \mapsto \sqrt{1-t^2}P^2(t)$ est continue sur $[-1, 1]$ et à valeurs positives et comme son intégrale de -1 à 1 est nulle, $t \mapsto \sqrt{1-t^2}P^2(t)$ est nulle sur $[-1, 1]$, c'est-à-dire que $t \mapsto P^2(t)$ est nulle sur $[-1, 1]$. P^2 (et donc P) a une infinité de racines, c'est le polynôme nul et ainsi $P = 0$. La forme $\langle\, ,\, \rangle$ est positive.
On peut conclure : $\langle .\, ,\, .\rangle$ est un produit scalaire.

Calculons à la main $\langle P_0,\, P_0\rangle$. On a : $\langle P_0,\, P_0\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt$.
On pose le changement de variable $t = \cos u$, où $u \in [0, \pi]$. On a :

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos^2 u} = \sqrt{\sin^2 u} = |\sin u| = \sin u,$$

car $\sin u \geqslant 0$ pour $u \in [0, \pi]$. Il reste : $\langle P_0,\, P_0\rangle = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{0} \sin u \, \sin u\, dt$, car $dt = -\sin u\, du$.

Puis : $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u \Rightarrow \sin^2 u = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2u)$. On a alors :

$$\langle P_0,\, P_0\rangle = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2u)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[u - \frac{1}{2}\sin 2u\right]_0^{\pi},$$

en intégrant $u \mapsto 1 - \cos 2u$.
Finalement : $\langle P_0,\, P_0\rangle = \dfrac{1}{\pi}(\pi - 0) = 1$ car $\sin(2\pi) = \sin(2\times 0) = 0$.
• Calculons à la main $\langle P_0,\, P_1\rangle$:
On a : $\langle P_0,\, P_1\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} 2t\sqrt{1-t^2}\,dt$. On pose le changement de variable $u = -t$, ce qui donne :

$$\langle P_0,\, P_1\rangle = -\frac{2}{\pi}\int_1^{-1}(-2u)\sqrt{1-u^2}\,(-du) = \frac{2}{\pi}\int_1^{-1} 2u\sqrt{1-u^2}\,du = -\langle P_0,\, P_1\rangle.$$

Ainsi : $\langle P_0,\, P_1\rangle = 0$.
Remarque
Ceci est général, l'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$ si f est impaire.

• Calculons à la main $\langle P_1,\, P_1\rangle$:
On a : $\langle P_1,\, P_1\rangle = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} 4t^2\sqrt{1-t^2}\,dt$. Le mieux est de repartir sur le même changement de variable que pour le calcul de $\langle P_0,\, P_0\rangle$. On pose donc $t = \cos u$ avec $u \in [0, \pi]$. On écrit :

$$\langle P_1,\, P_1\rangle = -\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{0} 4\cos^2 u \sin u \sin u\,du = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 4\cos^2 u \sin^2 u\,du.$$

Or $4\cos^2 u \sin^2 u = (\sin 2u)^2$. Effectuons le changement de variable $v = 2u$:

$$\langle P_1,\, P_1\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 2u\,du = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 v\,dv$$

car $dv = 2du$.
On utilise encore la célèbre formule trigonométrique : $\sin^2 v = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2v)$. Et :

$$\langle P_1,\, P_1\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1 - \cos 2v)\,dv = \frac{1}{2\pi}\left[v - \frac{1}{2}\sin 2v\right]_0^{2\pi},$$

ce qui donne : $\langle P_1,\, P_1\rangle = \dfrac{1}{2\pi}(2\pi - 0) = 1$. On résume tout cela :

$$\langle P_0,\, P_0\rangle = 1,\ \langle P_0,\, P_1\rangle = 0,\ \langle P_1,\, P_1\rangle = 1.$$

3)b) Le principe de la méthode est le suivant. Prenons une fonction f à valeurs positives et continue sur $[a, b]$. : l'aire comprise entre la courbe représentative de f, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ est $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Considérons le segment de droite passant par $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. L'aire comprise entre ce segment de droite, l'axe $0x$ et les droites $x = a$ et $x = b$ est une approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. On appelle ce principe « méthode des trapèzes » car l'aire d'approximation est celle d'un trapèze. Si l'on suppose f croissante, cette aire d'approximation est dans ce cas la somme de l'aire d'un rectangle qui est $(b-a)f(a)$ et de l'aire d'un triangle qui est $\frac{1}{2}\times(b-a)\times(f(b) - f(a))$. L'aire totale est :

$$(b-a)f(a) + \frac{1}{2}(b-a)(f(b) - f(a)) = \frac{1}{2}(b-a)\left(f(a) + f(b)\right).$$

Si f est décroissante, on retrouve le même résultat.

On montre que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, l'erreur est de la forme :

$$\int_a^b f(t)\,dt - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(c),$$

où $c \in [a,b]$.
Pour obtenir de meilleurs résultats, on découpe l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles réguliers de pas $h = \frac{1}{n}(b-a)$ et on applique la méthode sur chacun des sous-intervalles $[a+ph,\, a+(p+1)h]$, où p est un entier variant de 0 à n.
On obtient pour approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$:

$$\frac{h}{2}\left(f(a)+f(a+h)+f(a+h)+...+f(a+(n-1)h)+f(a+(n-1)h)+f(b)\right).$$

En remarquant que tous les termes $f(a+ph)$ apparaîssent deux fois sauf $f(a)$ et $f(b)$, l'approximation de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est :

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}(f(a)+f(b))+\sum_{p=1}^{n-1} f\left(a+p\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

L'erreur commise est majorée par $\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$, où $M_2 = \sup\limits_{t\in[a,b]}|f''(t)|$ en supposant f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$.
Passons à la mise sous Python. On peut appliquer une somme ou une boucle selon votre envie. Pour la boucle, on tape :

```
>>> def trapezes(f,a,b,n) :
        h = (b-a)/float(n); z = 0.5 * (f(a) - f(b))
        for i in range(1,n) :
            z = z + f(a+i*h)
        return h*z
```

3)c) Il reste à appliquer notre jolie procédure pour calculer $\langle P_i, P_j\rangle$ pour i et j variant de 0 à 8. Par contre, il va falloir d'abord transformer les polynômes $P(n)$ qui sont des listes en vraies fonctions.

```
>>> def Np(n,t) :
        return sum(P(n).coef[p]*(t**p)  for p in range(0,n+1))
```

Par exemple, tapons :

```
>>> Np(7,1.4)
524.9907711999997
```

Cela monte rapidement en valeur. Logique, le coefficient dominant est 2^7 ici. Cela aura une conséquence plus loin.

Puis, on prépare le terrain : on a besoin de *sqrt* , de *pi* et donc de *numpy*. on en profite pour rentrer la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ que l'on appelera *poids*.

```
>>> import numpy as np
>>> def poids(t) :
        return np.sqrt(1-t**2)
```

Puis, on fait une double boucle pour calculer ce que l'on demande :

```
>>> for i in range(9) :
        for j in range(9) :
            if i <= j :
                print('<P' , i , 'Q' , j ,'>=')
                def F(t) :
                    return (2/np.pi)*poids(t)*Np(i,t)*Np(j,t)
                print(trapezes(F,-1,1,100))
```

On obtient (on donne ici un morceau choisi par manque de place) :

```
< P0 Q0 >=
0.998941892582
< P0 Q1 >=
4.38538094727e-17
```

$< P0\,Q2 >=$
-0.00315345107568
$< P0\,Q3 >=$
$3.88578058619e-17$
$< P1\,Q1 > =$
0.995788441506
$< P1\,Q2 > =$
$5.3290705182e-17$
$< P2\,Q7 > =$
$-3.8635761257e-16$
$< P2\,Q8 > =$
-0.0263862512064
$< P3\,Q3 > =$
0.983496377077
$< P4\,Q5 > =$
$1.24344978758e-16$
$< P4\,Q6 > =$
-0.0347247875959
$< P8\,Q8 > =$
0.926901657203

On remarque que tous les produits scalaires semblent nuls sauf dans le cas $i = j$, où ils semblent valoir 1. Maintenant, si l'on observe le résultat fourni pour $\langle P_i,\, P_i\rangle$, on remarque que sa valeur s'éloigne peu à peu de 1, en prenant i croissant. Cela est dû au défaut de précision car on a pris $n = 100$ ici pour appliquer *trapezes*, ce qui ne donne pas un résultat très performant. Et on sait que l'erreur est fonction de la dérivée seconde d'une fonction de la forme $t \mapsto \sqrt{1-t^2}P_i(t)^2$, où P_i est un polynôme de degré i de coefficient dominant 2^i, et donc la majoration de l'erreur est assez forte. Ceci dit, on peut conjecturer quand même que $\langle P_i,\, P_j\rangle = \delta_i^j$, c'est-à-dire vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$.
On dit que la famille $(P_i)_{i\in[\![0,8]\!]^2}$ est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\,,\,\rangle$.

$\boxed{\text{Problème}}$

On note $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs et $\mathbf{R}_+^\star$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on considère la fonction ϕ_t définie sur $\mathbf{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \phi_t(x) = \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}.$$

De plus, on considère la fonction réelle f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_t(x)\,dt.$

$\boxed{\text{Partie A}}$

Cette partie est le calcul de la somme de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.

1) On veut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}.$
On va faire de manière classique deux intégrations par parties successives, en remarquant á chaque fois que les fonctions considérées sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et la fonction $t \mapsto \cos(kt)$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt = -\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{\sin(kt)}{k}\,dt + \left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi,$$

par une première intégration par parties. Or :

$$\left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = 0-0=0.$$

Il reste :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = -\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{\sin(kt)}{k}\, dt.$$

On effectue une deuxième intégration par parties car $t \mapsto \dfrac{t}{\pi} - 1$ et $t \mapsto \dfrac{\sin(kt)}{k}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$:

$$-\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{\sin(kt)}{k}\, dt = \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{-\cos(kt)}{k^2}\, dt + \left[\left(-\frac{t}{\pi} + 1\right) \frac{-\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi.$$

Or :

$$\left[\left(-\frac{t}{\pi} + 1\right) \frac{-\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi = 0 - \left(-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{k^2}.$$

Il reste :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = -\int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{\cos(kt)}{k^2}\, dt + \frac{1}{k^2}.$$

Enfin :

$$\int_0^\pi \frac{1}{\pi} \frac{\cos(kt)}{k^2}\, dt = \left[-\frac{1}{\pi k^2} \frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = 0 - 0 = 0.$$

D'où :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}.$$

2)a) Soit $x \in]0, \pi]$. Montrons : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ e^{ix} \dfrac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{(n+1)x}{2}}$.
Pour cela, on va utiliser les formules d'Euler :

$$\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{inx}{2}} - e^{-\frac{inx}{2}}\right) \text{ et } \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right).$$

On écrit pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = e^{ix} \frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \frac{e^{-\frac{inx}{2}} - e^{\frac{inx}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}} = e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \frac{-2i \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)},$$

ce qui se met sous la forme simplifiée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{(n+1)x}{2}}.$$

2)b) Supposons encore $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in]0, \pi[$. On a :

$$\sum_{k=1}^n e^(ikx) = e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}},$$

en utilisant la formule qui donne la somme partielle d'une suite géométrique (rappelée dans le formulaire). Il reste à récupérer la partie réelle de chaque membre de l'égalité précédente.

$$\sum_{k=1}^n \text{Re}\left(e^(ikx)\right) = \text{Re}\left(e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\right),$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \text{Re}\left(e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\right).$$

Il reste à arranger le second membre de la dernière égalité. On utilise **2)a)** :

$$\text{Re}\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)=\text{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

car $\text{Re}\left(e^{i\frac{(n+1)x}{2}}\right)=\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$. On en déduit bien ce que l'on veut :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3) Soit Ψ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. On procède à une intégration par parties et l'on écrit :

$$\int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx=-\int_0^\pi \Psi'(x)\left[\frac{-\cos(mx)}{m}\right]dx+\left[\Psi(x)\frac{-\cos(mx)}{m}\right]_0^\pi.$$

Cela donne :

$$\int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx=\frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx+\frac{1}{m}\left[-\Psi(\pi)(-1)^m+\Psi(0)\right].$$

On remarque que $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\left[-\Psi(\pi)(-1)^m+\Psi(0)\right]=0$ car $-\Psi(\pi)(-1)^m+\Psi(0)$ est borné quand m varie.
Puis :

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{m}\int_0^\pi|\Psi'(x)\cos(mx)|\,dx.$$

Or Ψ' étant continue sur $[0,\pi]$, elle est bornée et il existe $M\in\mathbf{R}_+$, tel que pour tout $x\in[0,\pi]$, $|\Psi'(x)|\leqslant M$ et donc pour tout $x\in[0,\pi]$, $|\Psi'(x)\cos(mx)|\leqslant M$. On écrit :

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right|\leqslant\frac{1}{m}\int_0^\pi M\,dx=\frac{M\pi}{m},$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$.
Donc : $\lim\limits_{m\to+\infty}\left|\frac{1}{m}\int_0^\pi \Psi'(x)\cos(mx)\,dx\right|=0$ et on peut conclure.

$$\lim_{m\to+\infty}\int_0^\pi \Psi(x)\sin(mx)\,dx=0.$$

4) Soit g définie sur $[0,\pi]$ par : $x\mapsto\begin{cases}\dfrac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si}\quad x\in]0,\pi]\\[2ex] -1 & \text{si}\quad x=0\end{cases}$.

g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ par rapport de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$, le dénominateur ne s'annulant pas.
Il reste à montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0. Pour cela, on va utiliser le théorème de raccordement. Pour montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, il suffit de montrer que g est continue sur $[0,\pi]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ (ce qui est le cas) et que $\lim\limits_{x\to0}g'(x)$ existe (et sa valeur est alors celle de la dérivée de g en 0.

Commencons donc par montrer la continuité de g en 0.
On écrit, pour tout $x\in]0,\pi]$,

$$g(x)=\frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Effectuons un développement limité de sin à l'ordre 1 au voisinage de 0^+ :

$$g(x)=\frac{\frac{x^2}{2\pi}-x}{2\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)}=\frac{\frac{x}{2\pi}-1}{2\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)},$$

quantité qui tend vers -1 quand x tend vers 0. Donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = -1$ et g est bien continue en 0 et donc sur $[0,\pi]$ (car rapport de deux fonctions continues sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas).

Montrons maintenant que $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ existe.

On écrit, pour tout $x \in]0,\pi]$,

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\times\frac{2}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

On utilise un développement limité d'ordre 2 de sin et d'ordre 1 de cos, ce qui donne

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\left(2\left(\frac{x}{2}+o(x^2)\right)\right) - \left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)(1+o(x))}{4\left(\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} = \frac{\frac{x^2}{\pi}-x+o(x^2)-\frac{x^2}{2\pi}+x}{x^2+o(x^2)}.$$

Il reste :

$$g'(x) = \frac{\frac{x^2}{2\pi}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \frac{\frac{1}{2\pi}+o(1)}{1+o(1)} \Rightarrow \lim_{x\to 0} g'(x) = \frac{1}{2\pi}.$$

Donc, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

5) Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$. En utilisant **1)**, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\,dt,$$

puis cette égalité devient (en utilisant **2)**),

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dt = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dt.$$

Il reste à utiliser une formule trigonométrique classique (rappelée en indication au cas où) :

$$2\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{(2n+1)x}{2}\right)+\sin\left(\tfrac{-x}{2}\right).$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)+\sin\left(\frac{-x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dt.$$

Cela donne, en usant de la définition de la fonction g,

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)dx - \int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{4\pi}-\frac{t}{2}\right)dt.$$

On calcule :

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{4\pi}-\frac{t}{2}\right)dt = \left[\frac{t^3}{12\pi}-\frac{t^2}{4}\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi (1) devient :

$$(2)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\,dx + \frac{\pi^2}{6}.$$

Puis comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, on peut appliquer le résultat de la question **3)** :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} g(x)\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\,dx = 0.$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$ dans (2) et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie B

1) Pour x fixé in $\mathbf{R}$, $\phi_t(x) = O(e^{-t})$ et comme $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, f existe pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Le domaine de définition de f est $\mathbf{R}$.

Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = f(x)$, f est paire. **2)a)** On désire étudier la continuité de f.
• Si $t = 0$, $\Psi_t(x) = 1$ pour tout x et cette fonction est dérivable sur $\mathbf{R}_+$.
• Si $t > 0$, ϕ_t est dérivable par rapport à x par rapport de fonctions dérivables par rapport à x et :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \forall x \in \mathbf{R}_+,\ \phi_t'(x) = \frac{-e^{-t}2xt^2}{(1+x^2t^2)^2}.$$

Puis, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$|\phi_t'(x)| \leqslant te^{-t} \Leftrightarrow \left|\frac{-e^{-t}2xt^2}{(1+x^2t^2)^2}\right| \leqslant te^{-t},$$

c'est-à-dire

$$\frac{e^{-t}2xt^2}{(1+x^2t^2)^2} \leqslant te^{-t} \Leftrightarrow \frac{2xt}{(1+x^2t^2)^2} \leqslant 1 \Leftrightarrow 2xt \leqslant (1+x^2t^2)^2.$$

Si l'on pose $u = xt$, il s'agit d'étudier le signe de $g(u) = (1+u^2)^2 - 2u$. Si $g(u) \geqslant 0$ pour $u \geqslant 0$ alors l'inégalité à montrer est vraie.
Donc : $g(u) = (1+u^2)^2 - 2u = u^4 + 2u^2 - 2u + 1$.
On a : $g'(u) = 4u^3 + 4u - 2$ et $g''(u) = 12u^2 + 4$.
Donc $g''(u)$ est toujours positif et donc $g'(u)$ est croissante. Comme $g'(0) = -2$, il existe une valeur $\alpha > 0$ et une seule qui annule g'. Ainsi, g est décroissante sur $[0,\alpha]$ avec $g(0) = 1$ et g est croissante sur $[\alpha,+\infty[$.
Il reste à déterminer le signe de $g(\alpha)$. On a :

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3 = -2\alpha + 1.$$

Donc : $g(\alpha) = \alpha^4 + 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 2\alpha^3 > 0$.
La fonction g est bien à valeurs positives sur $\mathbf{R}_+$ et on a l'inégalité demandée :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+,\ \forall x \in \mathbf{R}_+,\ |\phi_t'(x)| \leqslant te^{-t}.$$

2)b) On peut en déduire : $\forall (t,x) \in (\mathbf{R}_+)^2$, $\forall h \in \mathbf{R}^\star$ avec $x + h \geqslant 0$,

$$\left|\frac{e^{-t}}{1+(x+h)^2t^2} - \frac{e^{-t}}{1+x^2t^2}\right| \leqslant |h|te^{-t}.$$

En effet, l'égalité des accroissements finis (le TAF pour les intimes) peut être appliqué :

$$\exists\, c \in]x, x+h[,\ \phi_t(x+h) - \phi_t(x) = h\phi_t'(c).$$

Donc : $|\phi_t(x+h)-\phi_t(x)| \leqslant |h|te^{-t}$. C'est ce que l'on voulait.

2)c) Pour tout x_0 fixé dans $\mathbf{R}_+$,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^{+\infty}\phi_t(x_0+h)\,dt-\int_0^{+\infty}\phi_t(x_0)\,dt,$$

c'est-à-dire :

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^{+\infty}\left[\phi_t(x_0+h)-\phi_t(x_0)\right]\,dt,$$

ce qui entraîne :

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| \leqslant \int_0^{+\infty}|\phi_t(x_0+h)-\phi_t(x_0)|\,dt \leqslant \int_0^{+\infty}|h|te^{-t}\,dt.$$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ a une valeur finie (que même le commun des mortels peut calculer). Donc si h tend vers 0, $|f(x_0+h)-f(x_0)|$ tend vers 0 et on a : $\lim\limits_{h\to 0} f(x_{\text{à}+h)=f(x_0)}$. Ce qui signifie que f est continue en x_0. Et donc f est continue sur $\mathbf{R}_+$. Comme f est paire, f est continue sur $\mathbf{R}$.

3) Reprenons pour $x \in \mathbf{R}_+$ et $h \geqslant 0$,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^{+\infty}\left[\phi_t(x_0+h)-\phi_t(x_0)\right]\,dt.$$

On remarque que $\phi_t(x_0+h) \leqslant \phi_t(x_0)$ et donc :

$$f(x_0+h)-f(x_0) \leqslant 0.$$

On peut conclure : f est décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Par parité, on étend à $\mathbf{R}$:

$$f \text{ est croissante sur } \mathbf{R}_- \text{ et décroissante sur } \mathbf{R}_+.$$

4) Soit $x>0$ et posons le changement de variable $u=xt$ dans l'intégrale définissant f :

$$\frac{f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}}{1+x^2t^2\,dt=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\times\frac{1}{x}\,du},$$

ce qui donne bien :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^\star,\ f(x)=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du.$$

On remarque maintenant que $\left|e^{-\frac{u}{x}}\right| \leqslant 1$ pour tout $u>0$ et pour tout $x>0$. Donc :

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du=\frac{\pi}{2x}.$$

Il reste à faire tendre x vers $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

5)a) Le but du jeu est la nature de l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.
On a les implications pour $x>0$,

$$0 \leqslant u \leqslant \sqrt{x} \Rightarrow -\sqrt{x} \leqslant -u \leqslant 0 \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant -\frac{u}{x} \leqslant 0$$

$$\Rightarrow e^{-\dfrac{1}{\sqrt{x}}} \leqslant e^{-\dfrac{u}{x}} \leqslant 1.$$

Il reste à intégrer :

$$e^{-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{du}{1+u^2}\leqslant\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\dfrac{u}{x}}}{1+u^2}\,du\leqslant\int_0^{\sqrt{x}}\frac{du}{1+u^2}.$$

Cela donne bien :

$$\forall x\in\mathbf{R}_+^\star,\ e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\arctan(\sqrt{x})\leqslant\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du\leqslant\arctan(\sqrt{x}).$$

5)b) On fait tendre x vers $+\infty$ dans la double inégalité précédente. On a entre autre :

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan\sqrt{x}=\frac{\pi}{2}\ \text{et}\ \lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}=1.$$

On en déduit par le théorème des Gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du.$$

5)c) On écrit (car $e^{-\frac{u}{x}}\leqslant 1$) :

$$0\leqslant\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du\leqslant\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^2}-\int_0^{\sqrt{x}}\frac{du}{1+u^2}.$$

Et donc, en intégrant les deux dernières intégrales :

$$\forall x\in\mathbf{R}_+^\star,\ 0\leqslant\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du\leqslant\frac{\pi}{2}-\arctan(\sqrt{x}).$$

5)d) On écrit :

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du+\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du.$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du=\frac{\pi}{2}\ \text{et}\ \lim_{x\to+\infty}\int_{\sqrt{x}}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{x}\right]=0.$$

Donc, on peut en déduire que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{u}{x}}}{1+u^2}\,du=\frac{\pi}{2}.$$

5)e) On en déduit un équivalent simple de f au voisinage de $+\infty$. En effet, quand x tend vers $+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)\sim\frac{\pi}{2x}.$$

5)f) $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ est définie en 0 et f étant à valeurs positives, et comme $f(x)\sim\dfrac{\pi}{2x}$, quand x tend vers $+\infty$ et comme $x\mapsto\dfrac{\pi}{2x}$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, on peut en déduire que :

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx\ \text{est divergente.}$$

Partie C

1)a) Soit $n\in\mathbf{N}$, on pose : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f(k)$. On écrit pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$(1)\ \ f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(t)\,dt\leqslant f(k).$$

On somme la première inégalité de (1) de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_0^n f(t)\,dt \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,dt.$$

Or $f(0)=1$ et il reste : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant 1 + \int_0^n f(t)\,dt$.
On somme la deuxième inégalité de (1) de 0 à $n-1$:

$$\int_0^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

car $f(n) \geqslant 0$. On a bien :

$$\forall n \in \mathbf{N}^\star,\ \int_0^n f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant 1 + \int_0^n f(t)\,dt.$$

1)b) Quand n tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$ tend vers $+\infty$ car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente. Alors, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ est une série divergente car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k) = +\infty$.

1)c) On peut en déduire que S_n est équivalente à $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt$.

En effet, dans la double inégalité de **1)a)**, on la divise par $\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt > 0$. On a :

$$1 \leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)}{\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt} \leqslant \frac{1}{\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt} + 1.$$

Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ et les deux membres extremes de la double inégalité tendent vers 1. Il reste :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)}{\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt} = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} f(k) \sim \int_0^n f(t)\,dt.$$

2) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\displaystyle v_n = \int_0^{+\infty} \phi_1(n^2x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1}}{1+n^4x^2}$.
Il reste à poser le changement de variable $u = n^2x$ dans la dernière intégrale et :

$$v_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1}}{1+u^2}\frac{du}{n^2} = \frac{1}{n^2e}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2n^2e}.$$

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2e} = \frac{\pi}{2e}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{2e}\times\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^3}{12e}.$$