2TSI. Devoir libre 02

Correction

Exercice 01

1) On définit $f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}$, puis pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}x^n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$L_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e^x}{n!} f_n^{(n)}(x).$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$L_0(x) = \frac{e^x}{0!} f_0^{(0)}(x) = e^x f_0(x) = e^x e^{-x} = 1.$$

Puis :

$$L_1(x) = \frac{e^x}{1!} f_1'(x) = e^x \left[-e^{-x}x + e^{-x}\right] = -x + 1.$$

Puis :

$$L_2(x) = \frac{e^x}{2!} f_2''(x) = \frac{e^x}{2}\left[-e^{-x}x^2 + 2xe^{-x}\right]' = \frac{e^x}{2}\left[e^{-x}x^2 - 4xe^{-x} + 2e^{-x}\right] = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$$

Résumons :

$$L_0(x) = 1,\ L_1(x) = -x + 1,\ L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$$

2) Rappelons pour commencer la formule de Gottfried Leibniz. Si f et g sont deux fonctions de classe C^n sur I, alors fg est de classe C^n sur I et pour tout $x \in I$, $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$.

Ici, on commence par écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-x}x^{n+1} = e^{-x}x^n x$. On applique alors la formule de Leibniz au rang $n+1$ avec $f(x) = x$, $g(x) = e^{-x}x^n$ et $I = \mathbb{R}$. . L'intérêt de prendre $f(x) = x$ est de remarquer qu'à partir de sa dérivée seconde, les dérivées successives de f sont nulles. On a :

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \left[xe^{-x}x^n\right]^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(k)} \left(e^{-x}x^n\right)^{(n+1-k)}.$$

Comme $x^{(k)} = 0$ pour $k \geqslant 2$, on a :

$$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \binom{n+1}{0} x \left(e^{-x}x^n\right)^{(n+1)} + \binom{n+1}{1}\left(e^{-x}x^n\right)^{(n)} = x\left(e^{-x}x^n\right)^{(n+1)} + (n+1)\left(e^{-x}x^n\right)^{(n)}.$$

On en déduit :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}^{(n+1)}(x) = x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x).$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (n+1)\frac{e^x}{(n+1)!}\left[e^{-x}x^{n+1}\right]^{(n+1)} = \frac{e^x}{n!}\left[e^{-x}x^{n+1}\right]^{(n+1)}.$$

Ce qui donne :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = \frac{e^x}{n!}\left(x\left[e^{-x}x^n\right]^{(n+1)} + (n+1)\left[e^{-x}x^n\right]^{(n)}\right),$$

qui se met sous la forme :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = x\frac{e^x}{n!}\frac{d}{dx}\left[n!e^{-x}L_n(x)\right] + (n+1)\frac{e^x}{n!}n!e^{-x}L_n(x).$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned}&(n+1)L_{n+1}(x)\\&= xe^x\left(-e^{-x}L_n(x)+e^{-x}L_n'(x)\right)+(n+1)L_n(x)\\&= -xL_n(x)+xL_n'(x)+(n+1)L_n(x),\end{aligned}$$

Et alors, on a bien le résultat :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = x\,L_n'(x)+(n+1-x)L_n(x).$$

4)a) On veut montrer que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\dfrac{d^{n-k}}{d\,x^{n-k}}(x^n)=\dfrac{n!x^k}{k!}$. Nous allons faire une récurrence. Par commodité pour l'effectuer, posons $p=n-k$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.
Il reste donc à démontrer que pour tout $p\in[\![0,n]\!]$, $\dfrac{d^p}{d\,x^p}(x^n)=\dfrac{n!x^{n-p}}{(n-p)!}$.
On a :

$$\frac{d^0}{d\,x^0}(x^n)=x^n=\frac{n!x^{n-0}}{(n-0)!}.$$

La proposition est donc vraie au rang $p=0$. Supposons qu'elle soit vraie à un rang $p=j$, où $j\leqslant n-1$. On a alors :

$$\frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}}(x^n)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^j}{dx^j}(x^n)\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{n!x^{n-j}}{(n-j)!}\right)=\frac{n!(n-j)x^{n-j-1}}{(n-j)!}=\frac{n!x^{n-(j+1)}}{(n-(j+1))!}.$$

C'est bien la proposition au rang $p=j+1$. On peut conclure :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ \frac{d^{n-k}}{d\,x^{n-k}}(x^n)=\frac{n!x^k}{k!}.$$

4)b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a déjà :

$$\begin{aligned}&\frac{\binom{n}{k}}{(k-1)!}+\frac{(n+1)\binom{n}{k}}{k!}+\frac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!}\\&=\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{(k-1)!}+\frac{(n+1)\frac{n!}{k!(n-k)!}}{k!}+\frac{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}{(k-1)!}.\end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}&\frac{\binom{n}{k}}{(k-1)!}+\frac{(n+1)\binom{n}{k}}{k!}+\frac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!(k-1)!}+\frac{(n+1)!}{k!k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(k-1)!(n+1-k)!}.\end{aligned}$$

Le second membre de cette dernière égalité (que l'on note A pour simplifier) doit être égal à

$$(n+1)\frac{\binom{n+1}{k}}{k!}=\frac{(n+1)(n+1)!}{k!k!(n+1-k)!}.$$

Écrivons alors :

$$A=\frac{(n+1)(n+1)!}{k!k!(n+1-k)!}\left[\frac{k(n-(k-1))}{(n+1)^2}+\frac{n-(k-1))}{n+1}+\frac{k^2}{(n+1)^2}\right]$$

car on a d'une part :

$$\frac{k!k!(n-(k-1))!}{(n+1)(n+1)!}.\frac{n!}{k!(n-k)!(k-1)!}=\frac{k(n-(k-1))}{(n+1)^2},$$

en utilisant $(n-(k-1))!=(n-(k-1))(n-k)!$, et d'autre part :

$$\frac{k!k!(n-(k-1))!}{(n+1)(n+1)!}.\frac{(n+1)!}{k!k!(n-k)!}=\frac{n-(k-1)}{n+1},$$

et enfin :

$$\frac{k!k!(n-(k-1))!}{(n+1)(n+1)!}.\frac{n!}{(k-1)!(k-1)!(n+1-k)!}=\frac{k^2}{(n+1)^2}$$

Ainsi, A vaut alors :

$$\begin{aligned}&\frac{(n+1)(n+1)!}{k!k!(n+1-k)!}\left[\frac{k(n-(k-1))+(n-(k-1))(n+1)+k^2}{(n+1)^2}\right]\\&=\frac{(n+1)(n+1)!}{k!k!(n+1-k)!}\left[\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2}\right]\\&=\frac{(n+1)(n+1)!}{k!k!(n+1-k)!}.\end{aligned}$$

On a bien le résultat voulu.

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \forall k\in[\![1,n]\!],\ \frac{\binom{n}{k}}{(k-1)!}+\frac{(n+1)\binom{n}{k}}{k!}+\frac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!}=(n+1)\frac{\binom{n+1}{k}}{k!}.$$

4)c) *Utilisation de la question précédente*

On va en fait utiliser plusieurs résultats précédents.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, posons : $L_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k$.

On va montrer cette égalité par récurrence.
La proposition est vraie pour $n=0$ car :

$$L_0(x)=1=\binom{0}{0}\frac{(-1)^0}{0!}x^0=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

De même, la proposition est vraie pour $n=1$ car :

$$L_1(x)=1-x=\binom{1}{0}\frac{(-1)^0}{0!}x^0+\binom{1}{1}\frac{(-1)^1}{1!}x^1=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

Supposons la proposition vraie pour n, entier non nul. Alors, partons du résultat de la question **3)** :

$$(n+1)L_{n+1}(x)=x\,L_n'(x)+(n+1-x)L_n(x).$$

En utilisant la proposition au rang n :

$$xL_n'(x)=x\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right)'=x\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}kx^{k-1}.$$

Et on a aussi :

$$(n+1-x)L_n(x)=(n+1-x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

Ce qui donne encore :

$$xL_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^k.$$

Et aussi :

$$(n+1-x)L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+1}.$$

En regroupant, la quantité $(n+1)L_{n+1}(x)$ devient donc

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^k+\sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+1}.$$

On la transforme en :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^k+\sum_{k=0}^{n}(n+1)\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}x^k.$$

Puis ensuite en :

$$n+1+\binom{n}{n}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}+\binom{n}{k}(n+1)\frac{(-1)^k}{k!}+\binom{n}{k-1}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\right]x^k.$$

Il reste á utiliser la question **4)b)** :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \frac{\binom{n}{k}}{(k-1)!}+\frac{(n+1)\binom{n}{k}}{k!}+\frac{\binom{n}{k-1}}{(k-1)!}=(n+1)\frac{\binom{n+1}{k}}{k!}.$$

Alors $(n+1)L_{n+1}(x)$ devient :

$$n+1+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}(n+1)\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

On remarque que :

$$n+1+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n+1}=\binom{n+1}{0}(n+1)\frac{(-1)^0}{0!}x^0+\binom{n+1}{n+1}(n+1)\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Et on a bien le résultat voulu :

$$(n+1)L_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(n+1)\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

C'est la proposition au rang $n+1$. On a bien montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+,\ L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

Utilisation de la formule de Leibniz

On part de $L_n(x)=\dfrac{e^x}{n!}f_n^{(n)}(x)=\dfrac{e^x}{n!}\left[e^xx^n\right]^{(n)}$.
Comme les fonctions $x\mapsto e^{-x}$ et $x\mapsto x^n$ sont de classe C^n sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer la formule de Leibniz :

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{-x})^{(k)}(x^n)^{(n-k)}=\frac{e^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^ke^{-x}\frac{n!}{k!}x^k,$$

en utilisant la question **4)a)**. En simplifiant $e^xe^{-x}=1$, on a le résultat. On a bien encore montré :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+,\ L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k.$$

5)a) On suppose $n\in\mathbb{N}^\star$ et $x\in\mathbb{R}_+$. On utilise les formes de $L_n(x)$ et de $L_{n+1}(x)$ trouvées à la question précédente. On écrit :

$$L_n'(x)-L_{n+1}'(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right)'-\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\right)'.$$

Cela donne, en effectuant les dérivées,

$$L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} x^{k-1} - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} x^{k-1}.$$

Puis, en mettant sous une seule somme, et en isolant un terme en trop,

$$L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} - \binom{n+1}{k} \right] \frac{(-1)^k}{(k-1)!} x^{k-1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n.$$

C'est bien le résultat demandé :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\binom{n}{k} - \binom{n+1}{k} \right) \frac{(-1)^k x^{k-1}}{(k-1)!} \right] + \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

5)b) On rappelle la (célèbre) formule de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ pour tout couple d'entiers (k, n) avec $1 \leqslant k \leqslant n$. Donc ici, l'égalité de la question **5)a)** devient pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^k x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(-1)^n x^n}{n!},$$

qui s'écrit encore :

$$L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \frac{(-1)^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(-1)^n x^n}{n!},$$

On change d'indice dans la somme :

$$L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$$

On en déduit bien le résultat voulu :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ L_n'(x) - L_{n+1}'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k x^k}{(k)!} + \frac{(-1)^n x^n}{n!} = L_n(x),$$

Exercice 02

1) On considère l'application :

$$\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], P \mapsto P - P'.$$

Pour montrer que ϕ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme, il faut montrer la linéarité de ϕ et montrer que l'image de $\mathbb{R}_n[X]$ est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Linéarité de ϕ

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi(P + \lambda Q) = P + \lambda Q - (P + \lambda Q)' = P + \lambda Q - P' - \lambda Q' = P - P' + \lambda (Q - Q').$$

On retrouve $\phi(P) + \lambda\phi(Q)$.

La restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$ est elle un endomorphisme ?

$\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la base $(1, X, ..., X^n)$. Il suffit de vérifier que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\phi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$\phi(1) = 1,\ \phi(X) = X - 1.$$

Puis :

$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ \phi(X^k) = X^k - kX^{k-1}.$$

Le polynôme $X^k - kX^{k-1}$ est de degré k pour tout k compris entre 1 et n. Donc $\phi(X^k)$ est un polynôme de degré au plus n pour tout entier k compris entre 0 et n. On peut conclure :

$$\phi \text{ induit sur } \mathbb{R}_n[X] \text{ un endomorphisme, noté } \phi_n.$$

2)a) On veut expliciter la matrice de ϕ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire dans la base $\beta = (1, X, X^2, ..., X^n)$. On utilise la question précédente. On sait que $\phi(1) = 1$ et que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\phi(X^k) = X^k - kX^{k-1}$. On en déduit chaque colonne de la matrice $M_\beta(\phi_n)$, matrice représentative de ϕ dans la base canonique β de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$M_\beta(\phi_n) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) On veut démontrer que ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode 01

Si vous connaissez les déterminants d'ordre n, on peut remarquer que le déterminant de $M_\beta(\phi_n)$ est triangulaire supérieur et est donc égal au produit des ses éléments diagonaux qui sont tous des 1. Ainsi, $\mathsf{Det}\, M_\beta(\phi_n) = 1 \neq 0$ et ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode 02

Si vous n'avez pas encore vu les déterminants d'ordre n, on peut expliciter l'inverse de ϕ_n, ce qui prouvera son existence et par la même occasion que ϕ est bijectif.
Soit $Q = P - P' = \phi_n(P)$. En dérivant, $Q' = P' - P''$, puis de manière générale, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $Q^{(k)} = P^{(k)} - P^{(k+1)}$ et enfin $Q^{(n)} = P^{(n)}$ car P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, donc de degré au plus n. En sommant toutes ces égalités, on aboutit à :

$$\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} = P.$$

Tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ possède donc un antécédent unique qui est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$. Ainsi,

$$\phi_n \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].$$

4) Comme ϕ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $\dfrac{X^i}{i!}$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et possède donc un antécédent unique par ϕ_n que l'on peut appeler s_i. Et $s_i \in \mathbb{R}_n[X]$.
Finalement, il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, ..., s_n$ telle que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \phi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}.$$

Par ailleurs, ϕ_n^{-1} est aussi un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme la famille $\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car cette famille est formée de $n+1$ polynômes tous de degrés différents dans un espace vectoriel de dimension $n+1$, on peut conclure que l'image de cette base par l'automorphisme ϕ_n^{-1} (qui est la famille $(s_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est encore une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On peut conclure :

$$(s_0, s_1, ..., s_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].$$

5) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. La quantité

$$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^n)$$

vaut, en la développant :

$$Id + \delta + ... + \delta^n - \delta - ... - \delta^n - \delta^{n+1}.$$

Or $\delta^{n+1} = 0$ car la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est nulle. Donc :

$$(Id - \delta)\, o\, (Id + \delta + ... + \delta^n) = Id.$$

6) On remarque que $\phi_n = Id - \delta$ et donc $\phi_n^{-1} = Id + \delta + ... + \delta^n$. On retrouve l'expression trouvée à la seconde méthode du développement de la question **3)**. On écrit :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = (Id + \delta + ... + \delta^n)\left(\frac{X^i}{i!}\right).$$

Alors, pour i fixé dans $[\![0, n]\!]$,

$$\phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \frac{X^i}{i!} + i\frac{X^{i-1}}{i!} + ... + i(i-1)...(i-(i-1))\frac{X^{i-i}}{i!}.$$

C'est-à-dire :

$$\phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \frac{X^i}{i!} + \frac{X^{i-1}}{(i-1)!} + ... + \frac{X^0}{0!}.$$

On peut conclure :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ \phi_n^{-1}\left(\frac{X^i}{i!}\right) = \sum_{k=0}^{i} \frac{X^k}{k!}.$$

Remarque

La question **6)** semble être un « remake » de la question **3)**. Elle s'adresse surtout à ceux qui auraient calculé le déterminant et non expliciter ϕ_n^{-1} à la question **3)**.

Exercice 03

1)a) Soient a et b deux réels, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. Comme $f(a)f(b) < 0$, $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$. Donc, on peut même préciser qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.
Finalement, f s'annule sur $[a, b]$.

1)b) Écrivons en Python une fonction *rech_dicho* prenant en arguments une fonction f, deux flottants a et b tels que $f(a)f(b) < 0$, une précision *eps* et qui renvoie un couple de réels encadrant un zéro de f (noté l dans la suite) à une précision *eps* près. Le **principe de la dichotomie** consiste à obtenir une suite $(I_n)_n$ de segments emboîtés, dont la longueur tend vers 0 et contenant chacun la limite l. En notant g_n et d_n les bornes de ces intervalles, on dispose de deux suites adjacentes, convergeant vers l.

Pour obtenir cette suite de segments emboîtés, on procède comme suit :
• on pose initialement $g_0 = min(a, b)$ et $d_0 = max(a, b)$;

• en supposant construit le segment $I_n = [g_n, d_n]$, on pose $m = \frac{g_n + d_n}{2}$ (milieu du segment) et on calcule $f(m)$: si $f(m)$ est du signe opposé à $f(g_n)$ alors il existe une racine entre g_n et m; on pose alors $I_{n+1} = [g_n, m]$, c'est-à-dire $g_{n+1} = g_n$ et $d_{n+1} = m$. Sinon, il y a une racine entre m et d_n, donc on pose $g_{n+1} = m$ et $d_{n+1} = d_n$.
On sort de la boucle *while* dès que $d - g <= 2 * eps$. Le milieu de $[g, d]$ est bien à une distance de l (qui appartient à ce segment) d'au plus *eps*.

Passons à la procédure Python.

```
>>> def rech_dicho(f, a, b, eps) :
        g, d = min(a, b), max(a, b)
        while d - g > 2 * eps :
            m = (g + d)/2
            if f(m) == 0 :
                return (m, m)
            elif f(g) * f(m) < 0 :
                d = m
            else :
                g = m
        return (g, d)
```

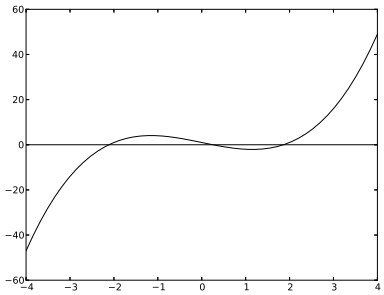
Remarque

Appliquons à $x^3 - 4x + 1 = 0$ pour trouver ses trois racines à 10^{-8} près. On tape :

```
>>> import numpy as np ; import matplotlib.pyplot as plt
>>> def f(x) : return(x**3 - 4*x + 1)
```

Déjà , on va isoler les racines pour se placer dans un intervalle où une seule racine existe.

```
>>> X = np.linspace(-4, 4, 500) ; Y = f(X) ; plt.plot(X, Y) ; plt.axhline( ) ; plt.show( )
```



Ainsi, chacun des intervalles $[-3, -1]$, $[-1, 1]$ et $[1, 3]$ contient une racine et une seule. Par exemple :

```
>>> rech_dicho(f, -3, -1, 1e-8)
```

$(-2.1149075478315353, -2.114907532930374)$

2)a) Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Posons $g(x) = f(x) - x$. Alors $g(0) = f(0) \in [0, 1]$ et donc $g(0) \geqslant 0$. Puis $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car $f(1) \in [0, 1]$. Ainsi, $g(0)g(1) \leqslant 0$ et g étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$\text{il existe } c \in [0, 1] \text{ tel que } f(c) = c.$$

2)b) Écrivons en Python une procédure *rech_pt_fixe* qui prend en arguments une fonction f que l'on suppose continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, une précision *eps* et qui renvoie un couple de réels encadrant un point fixe de f à une précision *eps* près. On va utiliser *rech_dicho*.

```
>>> def rech_pt_fixe(f, eps) :
        def g(x) :
            return f(x) - x
        print(rech_dicho(g, 0, 1, eps))
```

Remarque

On peut chercher l'unique solution de $\cos x = x$ sur $[0, 1]$. On tape :

```
>>> import numpy as np
>>> rech_pt_fixe(np.cos, 1e-8)
```

$(0.7390851229429245, 0.7390851378440857)$