Jérôme Von Buhren
http://vonbuhren.free.fr

Calcul de l'intégrale de Gauss

L'objectif de ce problème est de calculer pour tour réel $a > 0$ la valeur de l'intégrale suivante

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt.$$

Une intégrale ce cette forme est appelée une intégrale de Gauss.

I. Convergence de l'intégrale de Gauss

On fixe un réel $a > 0$. On considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = e^{-at^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

I.1) Montrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)dt$ est convergente, alors l'intégrale $I(a)$ est convergente.

I.2) Justifier que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f_a(t) = 0$.

I.3) En déduire que l'intégrale $I(a)$.

I.4) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot I(1)$.

II. Étude des intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les intégrales définies par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

II.1) Calculer W_0 et W_1.

II.2) En utilisant une intégration par partie, montrer que $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.3) En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante de valeur $\pi/2$.

II.4) Démontrer que la suite (W_n) est décroissante et positive.

II.5) En déduire, en utilisant l'encadrement $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$, la relation $W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n-1}$.

II.6) Conclure que la suite (W_n) converge vers 0 et que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Tournez svp

III. Calcul de l'intégrale de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

III.1) Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.2) Avec une étude de fonction, démontrer pour tout $x \in]-1, +\infty[$, l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$.

III.3) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité

$$I_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leqslant J_n.$$

III.4) En posant $x = \sqrt{n} \cdot \sin(t)$, montrer que $I_n = \sqrt{n} \cdot W_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.5) En posant $x = \sqrt{n} \cdot \tan(t)$, montrer que $J_n = \sqrt{n} \cdot W_{2n-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III.6) En déduire la valeur de I.

III.7) Quelle est la valeur de l'intégrale de Gauss $I(a)$ pour tout $a > 0$?

Fin du Problème