Jérôme Von Buhren
http://vonbuhren.free.fr

Approximation de $\sqrt{2}$

L'objectif de ce problème est de construire des approximations rationnelles du nombre $\sqrt{2}$.

I. Approximation par dichotomie

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } \left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)^2 > 2 \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } \left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)^2 \leqslant 2, \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } \left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)^2 > 2 \\ b_n & \text{si } \left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)^2 \leqslant 2. \end{cases}$$

I.1) Première approche.

- **I.1.A)** Calculer a_n et b_n pour $n \in [\![0,3]\!]$.
- **I.1.B)** Placer les points précédents sur un graphique.
- **I.1.C)** Démontrer que $(a_n, b_n) \in \mathbb{Q}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.2) Programmation.

- **I.2.A)** Écrire une fonction `dicho(n)` en langage Python qui prend en argument un entier naturel `n` et qui retourne le couple (a_n, b_n).
- **I.2.B)** Utiliser votre algorithme pour calculer (a_{10}, b_{10}).
- **I.2.C)** En informatique, quel est l'intérêt que $(a_n, b_n) \in \mathbb{Q}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

I.3) Convergence des suites.

- **I.3.A)** Montrer que $b_n - a_n = 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **I.3.B)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- **I.3.C)** En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un nombre $\ell \in \mathbb{R}$.

I.4) Approximation de $\sqrt{2}$.

- **I.4.A)** Montrer que $a_n \leqslant \sqrt{2} \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **I.4.B)** En déduire que $\ell = \sqrt{2}$.
- **I.4.C)** Expliquer comment obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près à l'aide des questions précédentes. On ne demande pas de déterminer une telle approximation.

Tournez svp

II. Approximation par la méthode de Newton

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

II.1) Première approche.

II.1.A) Calculer u_n pour $n \in [\![0, 3]\!]$.

II.1.B) Démontrer que $u_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2) Programmation. Écrire une fonction `newton(n)` en langage Python qui prend en argument un entier naturel `n` et qui retourne le nombre u_n.

II.3) Convergence de la suite.

II.3.A) En calculant $u_{n+1}^2 - 2$, montrer que $u_n \geqslant \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.3.B) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

II.3.C) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis montrer que sa limite est $\sqrt{2}$.

II.4) Contrôle de l'erreur.

II.4.A) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}.$$

II.4.B) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n}.$$

II.4.C) Montrer que $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{4}$ sans utiliser la calculatrice.

II.4.D) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \sqrt{2} \leqslant 3\left(\frac{1}{4}\right)^{2^n}.$$

II.4.E) Expliquer comment obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près à l'aide des questions précédentes. On ne demande pas de déterminer une telle approximation.

III. Conclusion

III) Quelle est la méthode la plus efficace entre les deux précédentes pour obtenir une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$? Justifier votre réponse.

Fin du Problème