# Séance de révision n° 3

*Séries numériques*

## Exercice 1

1. Rappeler les valeurs de $q \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^q}$ est convergente.

   En cas de convergence, on note $\zeta(q)$ sa somme. On admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.
2. Déterminer trois réels $a, b, c$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait
$$\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{(n+1)^2} .$$
3. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)^2}$ et calculer sa somme.

## Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right) - \ln n$.

   Trouver un équivalent de $u_n - u_{n-1}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. En déduire que la suite de terme général $u_n$ est convergente.
2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ (on pourra poser $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et exprimer $s_{2n}$ à l'aide de $u$).

## Exercice 3

À toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs, on associe la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n} \sum_{p=n+1}^{2n} a_p ,$$
ainsi que les sommes partielles définies par $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose aussi $S_k = \sum_{\frac{k}{2} \leqslant j \leqslant k} \frac{1}{j}$. On a donc par exemple $S_3 = \sum_{\frac{3}{2} \leqslant j \leqslant 3} \frac{1}{j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

1. Utiliser une comparaison série-intégrale pour obtenir
$$\forall k \geqslant 3, \quad \ln 2 \leqslant S_k \leqslant \ln 2 + \ln\left( \frac{k}{k-2} \right) .$$
2. En déduire la convergence de la suite $(S_k)_{k \geqslant 1}$, sa limite, et un majorant simple $M$ de cette suite.
3. Montrer que, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \sum_{p=1}^{2n} \left[ a_p \times \sum_{\frac{p}{2} \leqslant k \leqslant p-1} \frac{1}{k} \right]$.
4. En déduire l'existence d'un réel $m > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad m(A_{2n} - a_1) \leqslant B_n \leqslant M A_{2n} .$$
5. Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont la même nature.

## Exercice 4

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\, dt\,.$$

1. En étudiant $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a_k$ et en utilisant un changement de variable, prouver que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge, et que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k = \frac{\pi}{2} - 1\,.$$
2. Déterminer l'unique fraction rationnelle $\varphi$ telle que l'on ait
$$\forall\, n \geqslant 2\,, \quad a_n = \varphi(n)\, a_{n-2}\,.$$
3. Montrer que la suite $n(n+1)(n+2)a_n\, a_{n-1}$ est constante de valeur strictement positive notée $K$.
4. En déduire que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{K}}{n^{3/2}}$ puis que $\sum a_n$ converge.
5. Montrer enfin
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \frac{\pi}{2} + 1\,.$$

## Exercice 5

Soit $f$ une fonction de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f$ est décroissante, qu'elle tend vers 0 en $+\infty$, qu'elle est dérivable et que sa dérivée $f'$ est croissante.

1. Donner un exemple d'une telle fonction (on ne conserve pas cet exemple pour la suite de l'exercice).
2. Établir l'inégalité
$$\forall\, n \geqslant 1\,, \quad 2f(n+1) \;\leqslant\; f(n) + f(n+2)\,.$$
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} (-1)^p f(p)$.

   Montrer que les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, et en déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1} (-1)^p f(p)$.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\;x_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)$. Montrer que pour tout entier $n$
$$2x_n - (-1)^{n+1} f(n+1) \;=\; \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \big[f(p) - f(p+1)\big]\,.$$
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p \big[f(p) - f(p+1)\big]$. Montrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad |y_n| \;\leqslant\; f(n+1) - f(n+2)\,,$$
   puis en déduire que la série $\sum y_n$ est convergente.
6. Déduire des questions précédentes que $\sum x_n$ est convergente.
7. On suppose de plus que $f(p) \underset{+\infty}{\sim} f(p+1)$. Montrer que
$$x_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{2} f(n+1)\,.$$