Séance de révision n° 7

Séries entières

Exercice 1

Soit α un réel non nul. On pose, pour tout réel x de $[-1,1]$, $\quad g_\alpha(x) = \cos\big(\alpha \operatorname{Arcsin} x\big)$.

1. Montrer que g_α est de classe C^2 sur $]-1,1[$.
2. Donner, pour tout réel x de $]-1,1[$, l'expression de $g'_\alpha(x)$ en fonction de x.
3. Donner, pour tout réel x de $]-1,1[$, l'expression de $g''_\alpha(x)$ en fonction de x.
4. Montrer que g_α est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle
$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \qquad (\mathscr{E})$$
5. On recherche une solution de $(\mathscr{E})$ développable sur $]-1,1[$ en série entière sous la forme $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et telle que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+2} en fonction de a_n.
   (b) Donner, pour tout entier naturel p, la valeur de a_{2p+1}.
   (c) Exprimer, pour tout entier naturel p, a_{2p} en fonction de p (on ne cherchera pas à simplifier le numérateur de a_{2p}).
   (d) Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ?
6. Déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles $(\mathscr{E})$ admet des solutions polynomiales non nulles (dans cette question, les valeurs de $y(0)$ et $y'(0)$ ne sont pas fixées).
7. Dans cette question uniquement, on se place dans le cas où $\alpha = 1$.
   Pour tout réel x de $[-1,1]$, donner une expression simplifiée de $g_\alpha(x)$.
8. Dans cette question uniquement, on se place dans le cas où $\alpha = 2$.
   (a) Donner, pour tout réel x de $[-1,1]$, une expression simplifiée de $g_\alpha(x)$ en fonction de x.
   (b) Donner le développement en série entière de g_α.

Exercice 2

Soit k un entier naturel. On considère la fonction S_k définie par
$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n .$$

1. Donner l'intervalle de définition de S_k. On le notera I.
2. Établir une relation entre S_{k+1} et S'_k.
3. Pour $x \in I$, calculer $S_0(x)$, puis $S_1(x)$ et $S_2(x)$.
4. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_k tel que
$$\forall\, x \in I\,, \quad S_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}} .$$
5. Donner P_0, P_1 et P_2.
6. On note P'_k le polynôme dérivé de P_k. Établir la relation
$$\forall\, x \in I\,, \quad P_{k+1}(x) = x(1-x)P'_k(x) + (k+1)xP_k(x) .$$

7. Montrer que le polynôme P_k est de degré k, unitaire et qu'il s'annule en 0 dès que $k \geqslant 1$.
8. **Application**. Donner la valeur des sommes

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{4^n} \quad \text{et} \quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{\,n+(-1)^n}} \,.$$

Exercice 3

On note, pour tout réel x,

$$F(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \,.$$

1. Rappeler l'expression du développement en série entière autour de 0 de la fonction exponentielle.
2. (a) La fonction $x \longmapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est-elle développable en série entière autour de 0 ?
   (b) En déduire que la fonction qui, à tout réel x, associe $\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$, est développable en série entière autour de 0.
   (c) F est-elle développable en série entière autour de 0 ?
3. Montrer que, pour tout réel x,

$$F'(x) = xF(x) + 1 \,.$$

4. En posant, pour tout réel x, $\displaystyle F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, déterminer la valeur de a_0, la valeur de a_1, ainsi qu'une relation de récurrence reliant, pour tout entier $n \geqslant 1$, a_{n+1} à a_{n-1}.
5. Exprimer, pour tout entier naturel $p \geqslant 0$, a_{2p} et a_{2p+1}.
6. Donner un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 4

1. (a) Soit x un réel strictement positif, tel que $x < 1$. Que vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$?
   On justifiera avec soin toutes les étapes du calcul.
   (b) En déduire, pour tout réel $y > 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{y^n} \;=\; \frac{1}{y - 2 + \dfrac{1}{y}} \,.$$

2. On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$w_0 = 0 \,,\; w_1 = 1 \,,\;\; \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 2 \,,\; w_n = w_{n-1} + w_{n-2} \,.$$

   (a) Exprimer, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, w_n en fonction de n.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n x^n$?
   (b) Montrer que, pour des valeurs du réel x convenables,

$$\left(1 - x - x^2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n \;=\; x \,.$$

   (c) En déduire, pour des valeurs du réel y que l'on précisera, que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{y^n} \;=\; \frac{1}{y - 1 - \dfrac{1}{y}}$.
3. Un quadrillage a une longueur de n carreaux et une hauteur de 2 carreaux.
   Quel est le nombre de manières de paver complètement ce quadrillage par des rectangles de cotés de longueurs respectives 1 et 2 (les dominos recouvrent deux cases ayant un coté commun) ?
   On exprimera le résultat à l'aide d'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, en supposant $z_1 = 1$ et $z_2 = 2$ et on donnera la relation de récurrence qu'elle vérifie, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.